

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό σελ 142
A2. γ
A3. Λάθος, Σωστή, Λάθος, Σωστή, Λάθος.
A4. 1δ, 2γ, 3στ

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $f(1) = 5$ και $f'(x) = 4x$ για κάθε x .

Έτσι θα είναι $f(x) = 2x^2 + c$

Όμως για $x = 1$ γίνεται $f(1) = 2 + c \Leftrightarrow 5 = 2 + c \Leftrightarrow c = 3$

Έτσι $f(x) = 2x^2 + 3$

B2. (α) Επειδή η g είναι γνήσια μονότονη και ισχύει ότι $0 < 4$ $g(0) > g(4)$
θα είναι η g γνησίως φθίνουσα στο $[0, 4]$.

(β) Εφαρμόζουμε Θ.Ενδιάμεσων τιμών στη συνάρτηση g στο $[0, 4]$.

Πράγματι η g είναι συνεχής στο $[0, 4]$ και το α βρίσκεται μεταξύ των τιμών $g(4)$, $g(0)$. Έτσι θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = \alpha$. Επίσης η g είναι 1-1 ως γνησίως μονότονη και έτσι η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η g είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως πράξεις των συνεχών συναρτήσεων $y = e^x$, $y = x^{2019}$.

$$g'(x) = \frac{e^x(e^x + x^{2019}) - e^x(e^x + 2019x^{2018})}{(e^x + x^{2019})^2} = \frac{e^x x^{2018}}{(e^x + x^{2019})^2} = e^x x^{2018} \frac{x - 2019}{(e^x + x^{2019})^2}$$

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2019$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2019]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2019, +\infty)$.

Γ2. $f(x) = \frac{x^{2019}}{e^x} = \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2019}}} \right)^{2019}$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{\frac{x}{2019}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2019}{e^{\frac{x}{2019}}} = 2019 \cdot 0 = 0$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2019}}} \right)^{2019} = \lim_{y \rightarrow 0} y^{2019} = 0$

Γ3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + x^{2019}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{e^x + x^{2019}} \right) = 0 \cdot 0 = 0$

Άρα στο $-\infty$ έχει ασύμπτωτη τον άξονα $x'x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + x^{2019}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{x^{2019}}{e^x}} \stackrel{(\Gamma 2)}{=} \frac{1}{1 + 0} = 1$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – τηλ. 210 42 24 752 & 210 42 23 687
 Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – τηλ. 210 46 12 555

Άρα στο $+\infty$ έχει ασύμπτωτη τον άξονα $y = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η F ορίζεται και είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

$$F'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$F'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση e την τιμή $F(e) = \frac{1}{e}$.

Δ2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\infty(+\infty) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Έτσι $F((0, e]) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x), F(e) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$ και

$$F([e, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), F(e) \right] = \left(0, \frac{1}{e} \right]$$

Άρα το σύνολο τιμών της F είναι το $F((0, +\infty)) = \left(-\infty, \frac{1}{e} \right]$

Δ3. Ισοδύναμα η ζητούμενη γίνεται

$$e^2 \geq 2^e \Leftrightarrow \ln e^2 \geq \ln 2^e \Leftrightarrow 2 \geq e \ln 2 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \geq \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F(e) \geq F(2)$$

Αυτό ισχύει από Δ1 αφού F είναι γν. φθίνουσα στο $[e, +\infty)$.

Δ4. Η F είναι 1-1 στο $(0, e]$ ως γν. αύξουσα και έτσι ισοδύναμα η ζητούμενη για $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται

Αγ. Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – τηλ. 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – τηλ. 210 46 12 555

$$\begin{aligned}(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} &= (\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \ln(\eta\mu x)^{\sigma\upsilon\nu x} = \ln(\sigma\upsilon\nu x)^{\eta\mu x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \ln \eta\mu x = \eta\mu x \ln \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln \eta\mu x}{\eta\mu x} = \frac{\ln \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F(\eta\mu x) = F(\sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου

ΟΡΟΣΗΜΟ