

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ & ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ - ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f . Μονάδες 10

A2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα Δ . Να γράψετε τον ορισμό της αρχικής F της συνάρτησης f στο Δ . Μονάδες 5

A3. Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις: Μονάδες 10

(α) Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ μπορεί να διαπερνά την C_f .

(β) Το σημείο $(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον $x'x$, είναι ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$.

(γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και είναι $f(x_0) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0 .

(δ) Αν $A(x_0, y_0)$ σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης και συνεχούς συνάρτησης f , τότε θα είναι $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = x_0$.

(ε) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{x - x_0} = 2019$ τότε $g(x_0) = 0$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, που είναι γνησίως μονότονη και με γραφική παράσταση που διέρχεται από τα $A(1,3)$, $B(3,5)$.

B1. Βρείτε την μονοτονία της f .

Μονάδες 6

B2. Λύστε την εξίσωση: $f(f(e^{5-x})) = 5$

Μονάδες 6

B3. Δείξτε ότι αντιστρέφεται και βρείτε τις τιμές $f^{-1}(3)$, $f^{-1}(f^{-1}(5))$.

Μονάδες 6

B4. Να λύσετε την ανίσωση: $f(f^{-1}(x^2 + 4x) - 2) < 3$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, που διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,1)$, $\Gamma(3,1)$. Να δειχθεί ότι:

Γ1. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την διχοτόμο της γωνίας xOy σ'ένα τουλάχιστον σημείο του $(1,3)$.

Μονάδες 7

Γ2. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε, το σημείο $M_1(x_1, f(x_1))$ να απέχει από την αρχή O ελάχιστη απόσταση.

Μονάδες 10

Γ3. Η εφαπτομένη της C_f στο $M_1(x_1, f(x_1))$ είναι κάθετη στην ευθεία OM_1 .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση F με $e^{F(x)} + F(x) = 1 + x$ $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Δείξτε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_F , στο κοινό σημείο της C_F με τον άξονα $x'x$. Μονάδες 5

Δ3. Δείξτε ότι η F είναι αντιστρέψιμη και προσδιορίσετε τον τύπο της αντίστροφης. Μονάδες 5

Δ4. Αν $F(1) = \alpha$, να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 F(x) dx$$

Μονάδες 5

Δ5. Να δειχθεί ότι $F(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Δέσποινα Σωτηροπούλου