ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό βιβλίο

Α2. Θεωρία σχολικό βιβλίο

Α3. Θεωρία σχολικό βιβλίο

Α4. α) Σ β) Λ γ)Λ δ)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2}<0$ και συνεχής στο $\Re-\{1\}$ επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re-\{1\}$.

Β2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)'=\frac{2\cdot(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\frac{2}{(x-1)^3}>0\Leftrightarrow(x-1)^3>0\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$

.

$f''(x)<0$ στο $(-\infty,1)$ και f συνεχής στο $(-\infty,1)$, επομένως f κοίλη στο $(-\infty,1)$

$f''(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ και f συνεχής στο $(1,+\infty)$, επομένως f κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Β3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{(x-1)}}{\frac{x}{1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

Επομένως η οριζόντια ασύμπτωτη είναι η $y=1$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $f'(x)-f(x)=e^{x}\cdot\left(3x^{2}+1\right)\overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow} f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)\cdot e^{-x}=3x^{2}+1\Leftrightarrow$

$\left(f(x)\cdot e^{-x}\right)'=\left(x^{3}+x\right)'\Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-x}=x^{3}+x+c\overset{x=0}{\Longrightarrow} f(0)\cdot e^{0}=c\Leftrightarrow c=0$.

Άρα $f(x)=e^{x}\cdot\left(x^{3}+x\right)$.

Γ2. Ακόμα $g(x)=\dfrac{e^{x}\cdot\left(x^{3}+x\right)}{e^{x}}=x^{3}+x$

με g παραγωγίσιμη στο $\Re$ και $g'(x)=3x^{2}+1>0$ και αφού g συνεχής στο $\Re$ έχουμε

ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, επομένως $g\left(e^{x}\right)\le g(1-x)\overset{g\text{ γν.αύξουσα}}{\Longleftrightarrow} e^{x}\le 1-x$
$\Leftrightarrow e^{x}+x-1\le 0$

Θεωρούμε $h(x)=e^{x}+x-1$ παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $h'(x)=e^{x}+1>0$ και αφού h συνεχής στο $\Re$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ με προφανή ρίζα την $x=0$, αφού $h(0)=e^{0}+0-1=0$. Επομένως $h(x)\le h(0)\overset{h\text{ γν. αύξουσα}}{\Longrightarrow} x\le 0$.

Γ3. Έχουμε $\varphi^{3}(x)+\varphi(x)\ge x\Leftrightarrow g\left(\varphi(x)\right)\ge x$. Όμως g γνησίως αύξουσα στο $\Re$ άρα g είναι 1-1 και επομένως ορίζεται η αντίστροφη της g, g^{-1} η οποία είναι και αυτή γνησίως αύξουσα στο $\Re$ αφού για κάθε $y_1,y_2\in\Re$ με $y_1<y_2$ ισχύει ότι

$y_1<y_2\Rightarrow g\left(g^{-1}(x_1)\right)<g\left(g^{-1}(x_2)\right)\overset{g\text{ γν.αυξουσα}}{\Longrightarrow} g^{-1}(x_1)<g^{-1}(x_2)$.

Τότε $g^{-1}\left(g\left(\varphi(x)\right)\right)\ge g^{-1}(x)\Leftrightarrow\varphi(x)\ge g^{-1}(x)\Rightarrow\int_{0}^{10}\varphi(x)dx\ge\int_{0}^{10}g^{-1}(x)dx$.

Για το $\int_{0}^{10}g^{-1}(x)dx$ θέτω $x=g(u)\Rightarrow dx=g'(u)du$.

Αγίου Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – 18532 – Τηλ. 210-4224752 4223687

Για $x=0$ έχω $g(u)=0 \Leftrightarrow u=0$ και για $x=10$ έχω $g(u)=10 \Leftrightarrow u=2$, επομένως

$$\int_0^{10} g^{-1}(x)dx = \int_0^2 g^{-1}(g(u))\cdot g'(u)du = \int_0^2 u\cdot g'(u)du = \int_0^2 u\cdot(3u^2+1)du =$$

$$\int_0^2 (3u^3+u)du = \left[\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = 3\cdot\frac{16}{4}+\frac{4}{2}=14$$. Άρα $\int_0^{10}\varphi(x)dx \geq 14$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι $f(x)-G(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)-G'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=g(x) \Leftrightarrow$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)\cdot f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c \overset{x=1}{\Longrightarrow} f^2(1)=e^2+c \Leftrightarrow e^2=e^2+c \Leftrightarrow c=0.$$

Επομένως $f^2(x)=e^{2x} \Rightarrow |f(x)|=|e^x| \overset{f(x)>0}{\Longrightarrow} f(x)=e^x$

Ακόμα για την g έχουμε $f(x)\cdot g(x)=e^{2x} \Leftrightarrow e^x\cdot g(x)=e^{2x} \Leftrightarrow g(x)=e^x$

Επομένως $f(x)=g(x)$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$ Θέτω $\dfrac{1}{x}=u$ και όταν $x\to 0^-$ τότε $u\to-\infty$.

Επομένως $\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\frac{1}{u}}{e^u} = \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{1}{u\cdot e^u} = \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{e^{-u}}{u} \underset{DL'H}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{-e^{-u}}{1} = -\infty$.

Δ3. $\int_0^{\ln 2}\left(f(x^2)+f(x)\right)\cdot x\,dx = \int_0^{\ln 2}\left(e^{x^2}+e^x\right)\cdot x\,dx = = \int_0^{\ln 2}\left(xe^{x^2}+xe^x\right)\cdot dx =$

$$= \int_0^{\ln 2} xe^{x^2}dx + \int_0^{\ln 2} xe^x dx.$$

- $\int_0^{\ln 2} xe^{x^2}dx = \int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\left(x^2\right)' e^{x^2}\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{e^{\ln^2 2}-1}{2}$
- $\int_0^{\ln 2} xe^{x}dx = \left[xe^x\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x dx = 2\ln 2 - \left[e^x\right]_0^{\ln 2} = 2\ln 2 - 1$

Επομένως $\int_0^{\ln 2}\left(f\left(x^2\right)+f\left(x\right)\right)\cdot x\,dx = \frac{e^{\ln^2 2}-1}{2} + 2\ln 2 - 1.$

Δ4. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει ότι $1+x<e^x<1+xe^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < e^x - 1 < xe^x \overset{:x>0}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x$.

Θεωρούμε συνάρτηση $f\left(x\right)=e^x$ και εφαρμόζουμε Θεώρημα μέσης τιμής στο $\left[0,x\right]$.

f συνεχής στο $\left[0,x\right]$ ως εκθετική συνάρτηση

f παραγωγίσιμη στο $\left(0,x\right)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,x\right)$ τέτοιο ώστε $f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^x-e^0}{x} \Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^x-1}{x} (1)$

Ακόμα, $0<\xi<x \Rightarrow e^0 < e^{\xi} < e^x \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 < \frac{e^x-1}{x} < e^x$.

ΟΡΟΣΗΜΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

Επιμέλεια: Κατσίμπρας Ευθύμης