ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ
1ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

Α1. Διακρίνω τις περιπτώσεις:

— αν $x>0$, τότε $(\ln|x|)'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

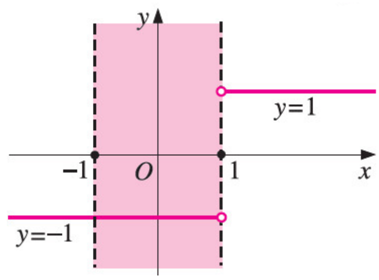
$$y'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{1}{-x}(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

Α2.
Α2.1. Ψευδής.

Α2.2. Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$ είναι ανεξάρτητο των άκρων α, β των διαστημάτων (α, x_0) και (x_0, β) στα οποία θεωρούμε ότι είναι ορισμένη η f.

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να βρούμε το όριο της συνάρτησης $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ στο x_0 = 0, περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $(-1,0)\cup(0,1)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο αυτή παίρνει τη μορφή $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}=\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$.



Επομένως, όπως φαίνεται και από το διπλανό σχήμα, το ζητούμενο όριο είναι $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-1$.

Α3. Κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ, λέγονται τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία:

- η f δεν παραγωγίζεται και
- η παράγωγός της f είναι ίση με το μηδέν.

Α4. 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Σ 5. Λ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$

Στο (−π, π) είναι: $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x$

(Τα ημx και συνx δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα, επομένως για $x\neq -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$)

$\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1 \Leftrightarrow x=k\pi-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}$ ή $x=\frac{3\pi}{4}$

Η f' είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο μεταξύ των ριζών της και επειδή $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-e^{-\frac{\pi}{2}}<0,\ f'(0)=1>0,\ f'(-\pi)=-e^{-\pi}<0$.

Επομένως η f' είναι θετική στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ και αρνητική στα $\left[-\pi,-\frac{\pi}{4}\right]$ και $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$.

Τελικά έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	max	↘	min	↗	max	↘	min

Επομένως η f είναι
γνησίως φθίνουσα στα $\left[-\pi,-\frac{\pi}{4}\right],\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

Έχει τοπικά μέγιστα στα σημεία $(-\pi,0)$ και $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$, επομένως έχει ολικό μέγιστο στο $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\right)$. Επίσης τοπικά ελάχιστα στα σημεία $\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$ και $(\pi,0)$, επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$.

B2. Η εφαπτομένη στο (0, 0) : $f(0)=0,\ f'(0)=1$

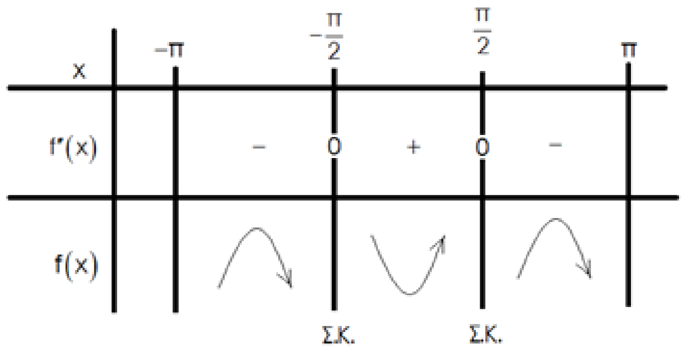
Επομένως η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $y=x$

B3. Η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x)=2e^x\sigma\upsilon\nu x$.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2} \text{ ή } \frac{\pi}{2} \text{ και}$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Πίνακας :



Η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ και κοίλη στα $\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right]$ και $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$. Έχει σημεία καμπής τα $\left(-\frac{\pi}{2},-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{\pi}{2}}\right)$.

B4. Στο $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ η f είναι κυρτή συνεπώς θα βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της y = x. Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x-x\right)dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}x\,dx=$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(e^x\right)'\eta\mu x\right)dx=\left[e^x\eta\mu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\left(e^x\right)'\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-\left[e^x\sigma\upsilon\nu x\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^x\eta\mu x\right)dx=$$

$$=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-E$$

Άρα

$$E=e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}-E\Leftrightarrow E=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Θέμα Γ

Γ1.

Γ1. α. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας θεωρώ

Αν $\lambda=1$: Άρα $y=x^2+6x+7$

Αν $\lambda=-1$: Άρα $y=-x^2+2x+5$

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases}y=x^2+6x+7\\ y=-x^2+2x+5\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}-x^2+2x+5=x^2+6x+7\\ y=-x^2+2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+4x+2=0\\ y=-x^2+2x+5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}.$$

Άρα το κοινό σημείο των 2 παραπάνω είναι το A(-1,2).

Θα δείξουμε ότι το Α επαληθεύει την συνάρτηση f για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$, δηλαδή $f(-1)=2 \Leftrightarrow \lambda-2(\lambda+2)+\lambda+6=2 \Leftrightarrow 0=0$ που ισχύει. Αρα όλες οι συναρτήσεις που παριστάνει η f, διέρχονται από το σταθερό σημείο Α(-1,2).

Γ1.β. Η f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $E\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ και αυτό είναι ελάχιστο αν α > 0 δηλαδή αν λ > 0, επομένως παρουσιάζει ελάχιστο για $x_0=-\frac{(\lambda+2)}{\lambda}$ με τιμή

$$f\left(-\frac{(\lambda+2)}{\lambda}\right)=\lambda\frac{(\lambda+2)^2}{\lambda^2}-\frac{2(\lambda+2)^2}{\lambda}+\frac{\lambda(\lambda+6)}{\lambda} \Leftrightarrow$$

$$f\left(-\frac{(\lambda+2)}{\lambda}\right)=\frac{\lambda(\lambda+6)-(\lambda+2)^2}{\lambda} \Leftrightarrow f\left(-\frac{(\lambda+2)}{\lambda}\right)=\frac{2\lambda-4}{\lambda}$$

Γ1.γ. Πρέπει $f_{min}(x)\geq 0 \Leftrightarrow f\left(-\frac{(\lambda+2)}{\lambda}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda-4}{\lambda}\geq 0 \Leftrightarrow \lambda\geq 2$.

Επομένως η ελάχιστη τιμή είναι $\lambda_{min}=2$.

Γ2.

Γ2.α. $I_\nu+I_{\nu+1}=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx=$

$$=\int_0^1\frac{x^{2\nu+1}\left(1+x^2\right)}{x^2+1}dx=\int_0^1 x^{2\nu+1}dx=$$

$$=\left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]=\frac{1}{2\nu+2}$$

Γ2.β. $I_0=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ell n\left(x^2+1\right)\right]_0^1=\frac{\ell n2}{2}$

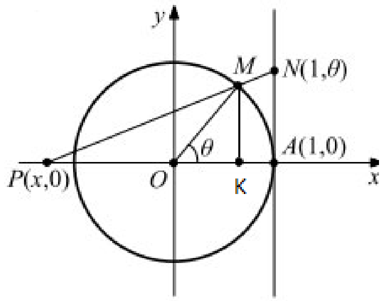
Από (Γ2.α) για ν=0 : $I_o+I_1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I_1=\frac{1}{2}-I_o=\frac{1-\ell n2}{2}$

για ν=1 : $I_1+I_2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow I_2=\frac{1}{4}-I_1=\frac{1}{4}-\frac{1-\ell n2}{2}=\frac{-1+2\ell n2}{4}$.

Θέμα Δ

Δ1

i) Φέρνουμε ΜΚ κάθετη στον x΄x.
Ισχύουν: (ΟΚ) = συνθ,
(ΜΚ)= ημθ,
(ΡΑ)= 1 – x ,
(ΡΚ)= - x +συνθ,
(ΑΝ) = θ



Τα τρίγωνα ΡΜΚ, ΡΝΑ είναι όμοια επομένως έχουν τις πλευρές τους ανάλογες:

$$\frac{PK}{PA}=\frac{MK}{NA}\Leftrightarrow\frac{-x+\sigma\upsilon\nu\theta}{1-x}=\frac{\eta\mu\theta}{\theta}\Leftrightarrow x=\frac{\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\theta-\eta\mu\theta}$$

ii)

$$\lim_{\theta\to0}x(\theta)=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\theta-\eta\mu\theta}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{\theta\to0}\frac{(\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)'}{(\theta-\eta\mu\theta)'}=$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}-\theta\cdot\eta\mu\theta-\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{-\theta\cdot\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{\theta\to0}\frac{(-\theta\cdot\eta\mu\theta)'}{(1-\sigma\upsilon\nu\theta)'}=$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{-\eta\mu\theta-\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}\underset{\text{D.L.H.}}{\overset{0/0}{=}}\lim_{\theta\to0}\frac{(-\eta\mu\theta-\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)'}{(\eta\mu\theta)'}=$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{-\sigma\upsilon\nu\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+\theta\cdot\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}=-2$$

iii)

$$x'(\theta)=\left(\frac{\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta}{\theta-\eta\mu\theta}\right)'=$$

$$=\frac{(\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)'(\theta-\eta\mu\theta)-(\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)(\theta-\eta\mu\theta)'}{(\theta-\eta\mu\theta)^2}=$$

$$=\frac{(\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}-\theta\cdot\eta\mu\theta-\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta})(\theta-\eta\mu\theta)-(\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)(1-\sigma\upsilon\nu\theta)}{(\theta-\eta\mu\theta)^2}=$$

$$=\frac{-\theta\cdot\etaμ\theta\left(\theta-\etaμ\theta\right)-\theta\cdot συν\theta+\etaμ\theta-\etaμ\theta\cdot συν\theta}{\left(\theta-\etaμ\theta\right)^2}=$$

$$=\frac{-\theta^2\cdot\etaμ\theta+\theta\cdot\etaμ^2\theta-\theta\cdot συν\theta+\etaμ\theta+\theta\cdot συν^2\theta-\etaμ\theta\cdot συν\theta}{\left(\theta-\etaμ\theta\right)^2}$$

και

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\etaμ\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot\etaμ^2\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot συν\frac{\pi}{2}+\etaμ\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\cdot συν^2\frac{\pi}{2}-\etaμ\frac{\pi}{2}\cdot συν\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}-\etaμ\frac{\pi}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}+1}{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2}=\frac{-\frac{\pi^2}{4}+\frac{\pi}{2}+1}{\left(\frac{\pi}{2}-1\right)^2}=\frac{-\pi^2+2\pi+4}{\left(\pi-2\right)^2}$$

Η παραγωγίσιμη συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό της σημείο x_o ,άρα από το θεώρημα Fermat $f'(x_o)=0$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη η f' είναι συνεχής στα $[0,x_o]$, $[x_o,1]$ άρα εφαρμόζοντας το ΘΜΤ υπάρχουν

$$\xi_1\in\left(0,x_o\right):\ f''\left(\xi_1\right)=\frac{f'\left(x_o\right)-f'\left(0\right)}{x_o-0}\Leftrightarrow f''\left(\xi_1\right)=\frac{-f'\left(0\right)}{x_o-0}\Leftrightarrow f'\left(0\right)=-x_o\cdot f''\left(\xi_1\right)$$

$$\xi_2\in\left(x_o,1\right):\ f''\left(\xi_2\right)=\frac{f'\left(1\right)-f'\left(x_o\right)}{1-x_o}\Leftrightarrow f''\left(\xi_2\right)=\frac{f'\left(1\right)}{1-x_o}\Leftrightarrow f'\left(1\right)=\left(1-x_o\right)\cdot f''\left(\xi_2\right)$$

Επομένως :

$$\left|f'\left(0\right)\right|=x_o\cdot\left|f''\left(\xi_1\right)\right|\le 2019x_o$$

$$\left|f'\left(1\right)\right|=\left(1-x_o\right)\cdot\left|f''\left(\xi_2\right)\right|\le\left(1-x_o\right)\cdot 2019$$

Προσθέτοντας κατά μέλη:

$$\left|f'\left(0\right)\right|+\left|f'\left(1\right)\right|\le 2018x_o+\left(1-x_o\right)\cdot 2019\Leftrightarrow\left|f'\left(0\right)\right|+\left|f'\left(1\right)\right|\le 2019.$$