

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ
1^ο ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2019
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ
Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

A1. Ναδειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln|x|$ και

$$x \in \mathbb{R}^* \text{ είναι } f'(x) = \frac{1}{x}.$$

7 Μονάδες

A2. Δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ εξαρτάται από τα άκρα α και β των παραπάνω διαστημάτων».

A2.1. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.

1 Μονάδα

A2.2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(A2.1)**.

3 Μονάδες

A3. Ποια σημεία της f σε ένα διάστημα Δ καλούνται κρίσιμα;

4 Μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Είναι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \eta\mu\frac{\pi}{6}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 2019$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

3. Αν $\int_a^b f(x) dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[a, \beta]$ τότε

υπάρχει υποσύνολο του $[a, \beta]$ στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Bolzano.

4. Είναι $\int_{-1}^1 (x^{2019} + x^{2017} + x^{2015} + \dots + x) dx = 0$.

5. Αν f, g, h ορίζονται στο \mathbb{R} και ισχύουν ότι

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 3$$

Τότε είναι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = k$ με $k \in [2, 3]$.

5x 2 = 10 Μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$ με $x \in [-\pi, \pi]$.

B1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της (τοπικά και ολικά).

7 μονάδες

B2. Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

4 μονάδες

B3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

7 μονάδες

B4. Να βρείτε το εμβαδόν μεταξύ της διχοτόμου της 1ης και 3ης γωνίας

των αξόνων, της C_f και των ευθειών $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = \frac{\pi}{2}$.

7 μονάδες

Θέμα Γ

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + 2(\lambda + 2)x + \lambda + 6$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$

Γ1. α. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από ένα σταθερό σημείο A για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

5 Μονάδες

Γ1.β. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η C_f έχει ελάχιστο και να βρεθεί η τιμή του ελάχιστου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

5 Μονάδες

Γ1.γ. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του λ για την οποία ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5 Μονάδες

Γ2. Έστω $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$, $v \in \mathbb{N}$.

Γ2.α. Να δειχθεί ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$.

5 Μονάδες

Γ2.β. Να βρεθούν τα ολοκληρώματα I_0 , I_1 και I_2 .

5 Μονάδες

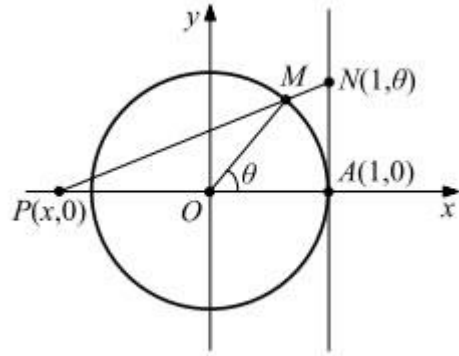
Θέμα Δ

Δ1. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος έχει ακτίνα 1cm και η ε εφάπτεται σε αυτόν στο σημείο A. Το τόξο AM είναι θ rad και το ευθ. τμήμα AN είναι θ cm. Η ευθεία MN τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο P(x,0). Να δείξετε ότι:

i)
$$x = \frac{\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta}{\theta - \eta\mu\theta} = x(\theta)$$

ii)
$$\lim_{\theta \rightarrow 0} x(\theta) = -2$$

iii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του P όταν η γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.



15 Μονάδες

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, για την οποία ισχύει ότι $|f''(x)| \leq 2019$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στη θέση $x_0 \in (0,1)$ να αποδειχθεί ότι $|f'(0)| + |f'(1)| \leq 2019$.