ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι f παραγωγίσιμη με $f'(x)=\dfrac{-\eta\mu\left[\pi(x-1)\right]\cdot\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}-2\alpha x$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(2-x)}{x-1}=-12\Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to1}\frac{\left[f(x^2)-f(1)\right]-\left[f(2-x)-f(1)\right]}{x-1}=-12\Leftrightarrow$$
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=-12\ (1)$$

- Για το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$ θέτω $x^2=y$. Για $x\to1$ έχω $y\to1$ και $x=\sqrt{y}$ επομένως

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{y\to1}\frac{f(y)-f(1)}{\sqrt{y}-1}=\lim_{y\to1}\frac{\left[f(y)-f(1)\right]\left(\sqrt{y}+1\right)}{y-1}=2f'(1)$$

αφού $f'(1)=\lim\limits_{y\to1}\dfrac{f(y)-f(1)}{y-1}$

- Για το $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(2-x)-f(1)}{x-1}$ θέτω $2-x=y\Leftrightarrow x=2-y$. Για $x\to1$ έχω $y\to1$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(2-x)-f(1)}{x-1}=\lim_{y\to1}\frac{f(y)-f(1)}{2-y-1}=\lim_{y\to1}\frac{f(y)-f(1)}{-(y-1)}=-f'(1)$$

Έτσι από $(1)\Rightarrow 2f'(1)-\left(-f'(1)\right)=-12\Leftrightarrow 3f'(1)=-12\Leftrightarrow f'(1)=-4$.

Ακόμα $f'(x)=\dfrac{-\eta\mu\left[\pi(x-1)\right]\cdot\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}}-2\alpha x \underset{f'(1)=-4}{\overset{x=1}{\Leftrightarrow}} -4=-\eta\mu0-2\alpha\Leftrightarrow -2\alpha=-4\Leftrightarrow\alpha=2$.

Β2. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ με

$f''(x)=\left(-\eta\mu\left[\pi(x-1)\right]-4x\right)'\Leftrightarrow f''(x)=-\sigma\upsilon\nu\left[\pi(x-1)\right]\cdot\pi-4<0$, αφού

$\sigma\upsilon\nu\left[\pi\left(x-1\right)\right] \geq -1 \Leftrightarrow -\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left[\pi\left(x-1\right)\right] \leq \pi \Leftrightarrow -\pi\cdot\sigma\upsilon\nu\left[\pi\left(x-1\right)\right]-4 \leq \pi-4<0$
και f συνεχής στο $\Re$ ως παραγωγίσιμη επομένως η f είναι κοίλη στο $\Re$.

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, C_f στο $A\left(1,f\left(1\right)\right)$ είναι $y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\cdot\left(x-1\right)$ με $f\left(1\right)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 0}{\pi}-\alpha+1=\dfrac{1}{\pi}-2+1=\dfrac{1}{\pi}-1$.

Άρα $y-\left(\dfrac{1}{\pi}-1\right)=-4\cdot\left(x-1\right) \Leftrightarrow y-\dfrac{1}{\pi}+1=-4x+4 \Leftrightarrow y=-4x+3+\dfrac{1}{\pi}$.

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\Re$ επομένως η εξίσωση εφαπτομένης βρίσκεται "πάνω" από την C_f. Άρα $f\left(x\right) \leq -4x+3+\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left[\pi\left(x-1\right)\right]}{\pi}-\left(2x^2-1\right) \leq -4x+3+\dfrac{1}{\pi} \Leftrightarrow$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\left[\pi\left(x-1\right)\right]}{\pi} \leq 2x^2-4x+2+\frac{1}{\pi} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left[\pi\left(x-1\right)\right] \leq 2\pi\cdot\left(x-1\right)^2+1.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $2e^{f(x)}=e^{2f(x)}\cdot f'\left(x\right)+f'\left(x\right) \overset{:e^{f(x)}}{\Longleftrightarrow} 2=e^{f(x)}\cdot f'\left(x\right)+\dfrac{f'\left(x\right)}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow$

$$e^{f(x)}\cdot f'\left(x\right)+e^{-f(x)}\cdot f'\left(x\right)=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=\left(2x\right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c \underset{f(0)=0}{\overset{x=0}{\Longleftrightarrow}} c=0.$$

Έτσι $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \underset{g(x)=e^{f(x)}}{\Longleftrightarrow} g\left(x\right)-\dfrac{1}{g\left(x\right)}=2x \Leftrightarrow \dfrac{g^2\left(x\right)-1}{g\left(x\right)}=2x \Leftrightarrow$

$$g^2\left(x\right)-1=2x\cdot g\left(x\right) \Leftrightarrow g^2\left(x\right)-2x\cdot g\left(x\right)=1 \Leftrightarrow$$

$$g^2\left(x\right)-2x\cdot g\left(x\right)+x^2=1+x^2 \Leftrightarrow \left(g\left(x\right)-x\right)^2=1+x^2.$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h\left(x\right)=g\left(x\right)-x$, επομένως $h^2\left(x\right)=1+x^2 \Leftrightarrow \left|h\left(x\right)\right|=\sqrt{1+x^2}$

Η εξίσωση $h\left(x\right)=0$ δεν έχει ρίζες στο $\Re$, επομένως $h\left(x\right)\neq 0$ και συνεχής, άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο με $h\left(0\right)=g\left(0\right)=e^{f(0)}=1>0$ και επομένως $h\left(x\right)>0$, άρα

$$h\left(x\right)=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow g\left(x\right)-x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow g\left(x\right)=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2}$$

$f\left(x\right)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad x\in\mathbb{R}$ γιατί $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\geq|x|\geq -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$.

Γ2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Επομένως $f'(x)>0$ στο $\Re$ και f συνεχής επομένως $f \nearrow$ στο $\Re$.

Γ3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f''(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow -x>0 \Leftrightarrow x<0$

Η συνάρτηση παρουσιάζει σημείο καμπής το $f(0)=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	$\cup$	Σ.Κ.	$\cap$

Γ4. $E(\Omega)=\int_0^1 |f(x)-x|dx$ όπου $f(x)\le x$ γιατί η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0,1]$ και επομένως η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της σημείο $(0,f(0))$ που είναι $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$ με $f(0)=0$ και $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow f'(0)=1$, άρα $y-0=1\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=x$. Επομένως

$$E(\Omega)=\int_0^1 (x-f(x))dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^1 (x)' f(x)dx=$$

$$\frac{1}{2}-\left[x\cdot f(x)\right]_0^1+\int_0^1 x\cdot f'(x)dx=\frac{1}{2}-f(1)+\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln(1+\sqrt{2}).$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{[f(1+5h)-f(1)]-[f(1-h)-f(1)]}{h}=0$ **(1)**

Για το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h}$ θέτω $1+5h=x \Leftrightarrow h=\dfrac{x-1}{5}$. Όταν $h\to 0$ τότε $x\to 1$, επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{\frac{x-1}{5}}=5\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=5\cdot f'(1)$. (f παραγωγίσιμη)

Για το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}$ θέτω $1-h=x \Leftrightarrow h=1-x \Leftrightarrow h=-(x-1)$. Όταν $h\to 0$ τότε $x\to 1$, επομένως $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{-(x-1)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=-f'(1)$.

Από (1) είναι $5\cdot f'(1)-f'(1)=0 \Leftrightarrow 4f'(1)=0 \Leftrightarrow f'(1)=0$.

Για $x\in(0,1)$ έχω f' γνησίως αύξουσα άρα $x<1 \Rightarrow f'(x)<f'(1)=0$ και f συνεχής στο $(0,1]$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Για $x\in(1,+\infty)$ έχω f' γνησίως αύξουσα άρα $x>1 \Rightarrow f'(x)>f'(1)=0$ και f συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Επομένως η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1$.

Δ2. Η φ είναι παραγωγίσιμη, αφού g παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $\varphi'(x)=g'(x)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\geq 0$ αφού $f(x)>f(1)=1$ και $x-1>0$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και αφού φ συνεχής έχουμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Για την ανίσωση θεωρούμε $h(x)=\Phi(x+1)-\Phi(x)$ όπου h παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $h'(x)=\Phi'(x+1)-\Phi'(x) \Leftrightarrow h(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$.

Για $x+1>x \overset{\varphi\text{ γν.αύξ}}{\Leftrightarrow} \varphi(x+1)>\varphi(x) \Leftrightarrow \varphi(x+1)-\varphi(x)>0 \Leftrightarrow h'(x)>0$ και h συνεχής άρα h γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$. Η ανίσωση γράφεται

$$h(8x^2+5)>h(2x^4+5) \overset{h\text{ γν.αύξ}}{\Leftrightarrow} 8x^2+\cancel{5}>2x^4+\cancel{5} \Leftrightarrow$$

$$4x^2>x^4 \Leftrightarrow 4x^2-x^4>0 \Leftrightarrow$$

$$x^2(4-x^2)>0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} 4-x^2>0 \Leftrightarrow$$

$$x^2<4 \Leftrightarrow -2<x<2 \text{ και } x\neq 0.$$

Δ3. Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''(x)=(g'(x))'=\left(\frac{f(x)-1}{x-1}\right)' \Leftrightarrow g''(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2} \quad (1).$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f στο $[1,x]$ x>1

- Η f είναι συνεχής στο $[1,x]$ ως παραγωγίσιμη
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,x)$

Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(\xi)(x-1)=f(x)-f(1)\ (2)$$

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow} g''(x)=\frac{f'(x)\cdot(x-1)-f'(\xi)(x-1)}{(x-1)^2}\Leftrightarrow g''(x)=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}>0$$

για κάθε $x\in(1,+\infty)$ αφού για $\xi<x\overset{f'\text{ γν. αυξ.}}{\Longrightarrow}f'(\xi)<f'(x)\Leftrightarrow f'(x)-f'(\xi)>0$.

Άρα η g είναι κυρτή.

Η εξίσωση $(\alpha-1)\varphi(x)=(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha)$ έχει προφανή ρίζα την $x=\alpha$ αφού $(\alpha-1)\varphi(x)=(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha)\overset{x=\alpha>1}{\Longrightarrow}(\alpha-1)\cdot\varphi(\alpha)=0$ που ισχύει γιατί $\varphi(\alpha)=g(\alpha)-g(\alpha)=0$. Θα δείξουμε ότι η ρίζα αυτή είναι και μοναδική.

Θεωρούμε $K(x)=(\alpha-1)\varphi(x)-(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha)$ παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$K'(x)=(\alpha-1)\varphi'(x)-(f(\alpha)-1)\Leftrightarrow K'(x)=(\alpha-1)\left[\varphi'(x)-\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\right]\Leftrightarrow$$

$$K'(x)=(\alpha-1)\left[\varphi'(x)-g'(\alpha)\right].$$

- Για $x>\alpha\overset{g'\text{ γν. αυξ.}}{\Longrightarrow}g'(x)>g'(\alpha)\overset{g'(x)=\varphi'(x)}{\Longleftrightarrow}\varphi'(x)>g'(\alpha)\Leftrightarrow\varphi'(x)-g'(\alpha)>0$ άρα $K'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,+\infty)$ και $K(x)$ συνεχής στο $[\alpha,+\infty)$ επομένως $K(x)$ γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,+\infty)$.
- Για $x<\alpha\overset{g'\text{ γν. αυξ.}}{\Longrightarrow}g'(x)<g'(\alpha)\overset{g'(x)=\varphi'(x)}{\Longleftrightarrow}\varphi'(x)<g'(\alpha)\Leftrightarrow\varphi'(x)-g'(\alpha)<0$

  Άρα $K'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,\alpha)$ και $K(x)$ συνεχής στο $(-\infty,\alpha]$ άρα $K(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\alpha]$.
- Έτσι η συνάρτηση $K(x)$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=\alpha$ το $K(\alpha)=0$. Άρα $K(x)\geq K(\alpha)=0$ και η εξίσωση $(\alpha-1)\cdot\varphi(x)=(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha)$ έχει μοναδική την ρίζα την $x=\alpha$.

Επιμέλεια: Κατσίμπρας Ευθύμης