ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta)-G(\alpha)$.

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού.

Α3. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση την λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$ τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$

γ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

δ) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left[\pi(x-1)\right]}{\pi}-\left(\alpha x^2-1\right)$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^2)-f(2-x)}{x-1}=-12$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f'(1)=-4$ και $\alpha=2$.

Β2. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα

Β3. Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\pi(x-1))\le 2\pi(x-1)^2+1$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re \to \Re$ για την οποία ισχύει ότι

$$\frac{2e^{f(x)}}{f'(x)} = e^{2f(x)} + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \Re \quad \text{και} \quad f(0)=0, \quad f'(x) \neq 0.$$

Γ1. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty) \to \Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε ακόμα την παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$ η οποία είναι τέτοια ώστε $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$ $x\in(1,+\infty)$ και την συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-g(\alpha)$ με $x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$. Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1)=1$ καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$.

Δ2. Η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα και στην συνέχεια να λύσετε την ανίσωση στο $\Re$, $\Phi(8x^2+6)-\Phi(8x^2+5)>\Phi(2x^4+6)-\Phi(2x^4+5)$, όπου η συνάρτηση Φ είναι η αρχική της συνάρτησης φ.

Δ3. Η συνάρτηση g είναι κυρτή καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\varphi(x)=(f(\alpha)-1)\cdot(x-\alpha) \text{ έχει ακριβώς μία λύση για } x>1.$$

Επιμέλεια: Κατσίμπρας Ευθύμης