

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$  και  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ , τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(\alpha), f(\beta)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ . Μονάδες 10

**A2.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση και  $A(x_0, f(x_0))$  ένα σημείο της γραφικής της παράστασης. Τι ονομάζεται ως εφαπτομένη της  $C_f$  στο  $A$ ; Μονάδες 5

**A3.** Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις: Μονάδες 10

(α) Η εφαπτομένη της  $C_f$  σε σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  έχει με την γραφική παράσταση  $C_f$  μόνο σε ένα κοινό σημείο.

(β) Αν  $f$  συνεχής συνάρτηση στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών του παραπάνω διαστήματος θα είναι ανοικτό διάστημα.

(γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(δ) Αν  $A(x_0, y_0)$  σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης  $f$ , τότε θα είναι  $(f^{-1} \circ f)(x_0) = y_0$ .

(ε) Αν είναι  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^2} = -\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ .

### ΘΕΜΑ Β

Ευθεία  $\varepsilon$  περιστρέφεται γύρω από το σημείο της  $P(4,2)$  διατηρώντας θετικό το συντελεστή διεύθυνσής της  $\lambda$ , ο οποίος μεταβάλλεται με ρυθμό 4 μονάδες το λεπτό. Κατά την διάρκεια της περιστροφής, η  $\varepsilon$  τέμνει τους άξονες στα σημεία  $A$  και  $B$ .

**B1.** Να υπολογίσετε το ρυθμό που μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ , τη στιγμή  $t = t_0$  κατά την οποία η ευθεία  $\varepsilon$  διέρχεται από το σημείο  $K(1,-1)$ . Μονάδες 10

Κατά την παραπάνω χρονική στιγμή  $t_0$  η ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \mu\sqrt{x+v}$   $\mu, v \in \mathbb{R}$  στο σημείο  $P$ .

**B2.** Να προσδιορίσετε τις τιμές των  $\mu, v$ . Μονάδες 8

**B3.** Αν  $\mu = 2, v = -3$  να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία  $\varepsilon$ , την γραφική παράσταση της  $f$  και τον άξονα  $x'x$ . Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ώστε να ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 3x}{x} = 2, \quad F(9) = 0$$

**G1.** Να δείξετε ότι η  $C_F$  διέρχεται από το σημείο  $O(0,0)$ . Μονάδες 4

**G2.** Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_F$  στο σημείο  $O(0, F(0))$ . Μονάδες 4

**G3.** Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση  $y = x - 6$  τέμνει την  $C_F$  σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,9)$ . Μονάδες 5

**G4.** Αν η  $F$  στρέφει τα κοίλα άνω, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (0,9)$  στο οποίο η  $F$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. Μονάδες 6

**G5.** Να αποδείξετε ότι: (i)  $\int_0^2 F(x) dx > 10$  Μονάδες 3

(ii)  $\int_0^9 F(x)dx > 9F(\xi)$

Μονάδες 3

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $\varphi(x) = e^x + x - 5 \quad x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1.** Να μελετήσετε την  $\varphi$  ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα. Μονάδες 5

**Δ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  έχει μοναδική λύση  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Μονάδες 5

**Δ3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g(x) = \ln(5-x)$  ως προς την μονοτονία και κατόπιν να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$ . Μονάδες 5

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $g(x_0) = x_0$ . Μονάδες 5

**Δ5.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_\varphi$  στο σημείο της με τετμημένη  $\ln \alpha \quad \alpha > 0$ . Μονάδες 2

**Δ6.** Να αποδείξετε ότι:  $e^x + x \geq (\alpha + 1)(x - \ln \alpha) + (\alpha + \ln \alpha)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης