

Γ΄ ΤΑΞΗ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση:

Αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, η το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

(β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο (α)

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη ΣΩΣΤΟ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή ΛΑΘΟΣ, αν η πρόταση είναι λάθος.

i) Αν f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντιστοίχως και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f \circ g = g \circ f$

ii) Αν f είναι μια συνάρτηση γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, τότε είναι και 1-1

iii) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, τότε αυτό ανήκει στην ευθεία $y=x$.

iv) Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ υπάρχουν, τότε υπάρχει και το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

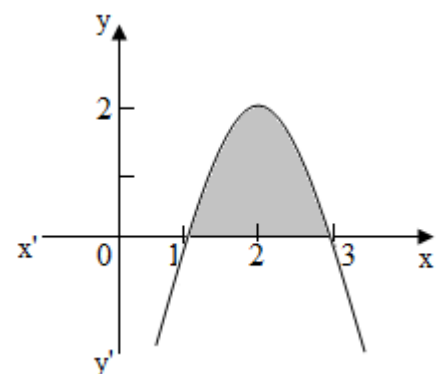
v) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω μία πολωνυμική συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' απεικονίζεται στο διπλανό σχήμα.



- Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ισούται με 10τμ.
- $f(1)=0$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-3}{x-2} = f'(2)$

B1. Ναδειχθεί ότι η f έχει το πολύ μία ρίζα στο διάστημα $(1,3)$ **Μονάδες 2**

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα καθώς και τα ακρότατα της. **Μονάδες 5**

B3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη καθώς και το σημείο καμπής της C_f . **Μονάδες 5**

B4. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} , να υπολογισθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, να χαράξετε την γραφική παράσταση της f και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=a$ για κάθε πραγματικό αριθμό a . **Μονάδες 8**

B5. Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f . **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο πεδίο ορισμού της για την οποία ισχύουν :

- f παραγωγίσμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1)=1$.
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(e^{h-x} - 1) \cdot [f(x+2h) - f(x)]}{2h^2} = 2f(x) + 2x(\ln x - 1), x > 0$

Γ1. i) Ναδειχθεί ότι : $x \cdot f'(x) = 2f(x) + 2x \cdot (\ln x - 1), x > 0$ **Μονάδες 4**

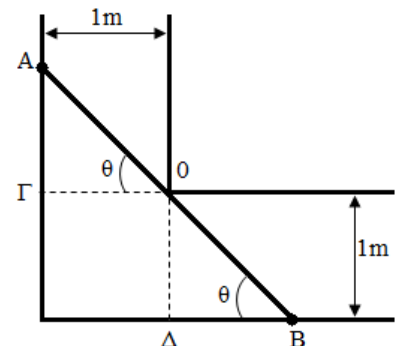
ii) Ναδειχθεί ότι : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ **Μονάδες 5**

Γ2. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα – σημεία καμπής, την μονοτονία και ναδειχθεί ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. **Μονάδες 5**

Γ3. Ναλυθεί ως προς x η εξίσωση : $f(x^{2018}) + f(e) = f(x^{2019}) + f(e^x)$ **Μονάδες 6**

Γ4. Έστω σημείο $M(x, f(x))$ του οποίου η τετμημένη απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων O με ταχύτητα $2m/s$, (ε) η εφαπτομένη ευθεία στο M της C_f και $\theta(t)$ η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον xx' . Να βρεθεί η θέση του M τη χρονική στιγμή που η εφαπτομένη (ε) σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με τους άξονες και ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ είναι ίσος με -4 . **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Δ



Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα, και AB είναι μια σκάλα, η οποία αν μεταφερθεί οριζόντια θέλουμε να στρίψει στη γωνία.

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι $AB = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = f(\theta), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Μονάδες 2

ii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ , για την οποία το AB γίνεται ελάχιστο, οπότε η σκάλα θα στρίψει στη γωνία.

Μονάδες 4

iii) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της $f(\theta)$.

Μονάδες 2

Δ2. Έστω οι συναρτήσεις $g(\theta) = f(\theta) + f(\pi - \theta)$ και $h(\theta) = -\frac{1}{g(\theta)}$

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να γίνει η γραφική τους παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 5

Δ3. Το σημείο $\xi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση ΚΛ μεταξύ των C_g και C_h παίρνει τη μικρότερη τιμή της.

Νδο οι εφαπτόμενες των C_g και C_h στα σημεία $K(\xi, g(\xi))$ και $L(\xi, h(\xi))$ είναι παράλληλες.

Μονάδες 5

Δ4. i) Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2}{x^2 - 1} dx = \ln\left(\frac{3(2 - \sqrt{2})}{2 + \sqrt{2}}\right)$

Μονάδες 3

ii) Να υπολογιστεί το $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} g(\theta) d\theta$

Μονάδες 3

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Επιμέλεια: Θ.Μαλάκης- Ε.Λιάκουρα-Γ.Καπράλος