ΔΕΥΤΕΡΑ 10 – 06 – 2018

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Θέμα Α

Α1 Σελίδα 15, ορισμός.

β) i. Σελίδα 35, από “΄Εστω... $f(x)=y$.”

β) ii. Σελίδα 35, από “Από τον τρόπο... $g(y)=x$.”

Α2 Σελίδα 142, ορισμός Fermat.

Α3 Σελίδα 135, θεώρημα.

Α4 **α)** Λάθος. Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου, σελίδα 134.

β) Λάθος. Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου, σελίδα 71.

Α5 Η σωστή απάντηση είναι η γ.

Θέμα Β

B1. Η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$f(x)=e^{-x}+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$ με οριζόντια ασύμπτωτη.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda-2\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}+\lambda-2\right)=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{e^x}+\lambda-2\right)=0+\lambda-2=0$

$\lambda=2$

B2. $f(x)=e^{-x}+2,\ \mathbb{R}$

Θεωρούμε $g(x)=e^{-x}+2-x,\ \mathbb{R}$

g συνεχής στο $[2,\ 3]$ ως πράξεις συνεχών (σύνθεση εκθετικής και πολυωνυμικής)

$g(2)=\dfrac{1}{e^2}+2-2=\dfrac{1}{e^2}>0$

$g(3)=\dfrac{1}{e^3}+2-3=\dfrac{1}{e^3}-1<0$

$g(2)\cdot g(3)<0.$

Άρα υπάρχει $x_0\in(2,\ 3)$ έτσι ώστε

$g(x_0)=0\Leftrightarrow e^{-x_0}+2-x_0=0\Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$

$g'(x)=\left(e^{-x}+2-x\right)'$

$g'(x)=-e^{-x}-1<0$ άρα $g(x)\downarrow$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε η λύση x_0 είναι μοναδική στο $(2,\ 3)$ εφόσον η g είναι γνησίως μονότονη.

B3. $f(x)=e^{-x}+2$ για $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{e^{x_1}}+2=\frac{1}{e^{x_2}}+2 \Leftrightarrow \frac{1}{e^{x_1}}=\frac{1}{e^{x^2}} \Leftrightarrow e^{x_1}-e^{x^2} \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow}$$

$x_1=x_2$ άρα η f είναι $1-1$ στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι $1-1$ άρα αντιστρέφεται οπότε έχουμε

$y=f(x) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{e^x}+2$ με $y>2$

$y-2=\dfrac{1}{e^x}$ με $y-2>0$

$y>2$

$e^x=\dfrac{1}{y-2} \Leftrightarrow x=\ln\left(\dfrac{1}{y-2}\right)$

$x=-\ln(y-2)$

$f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$ με $y>2$

Θέτουμε όπου y το x άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ για κάθε $x>2$.

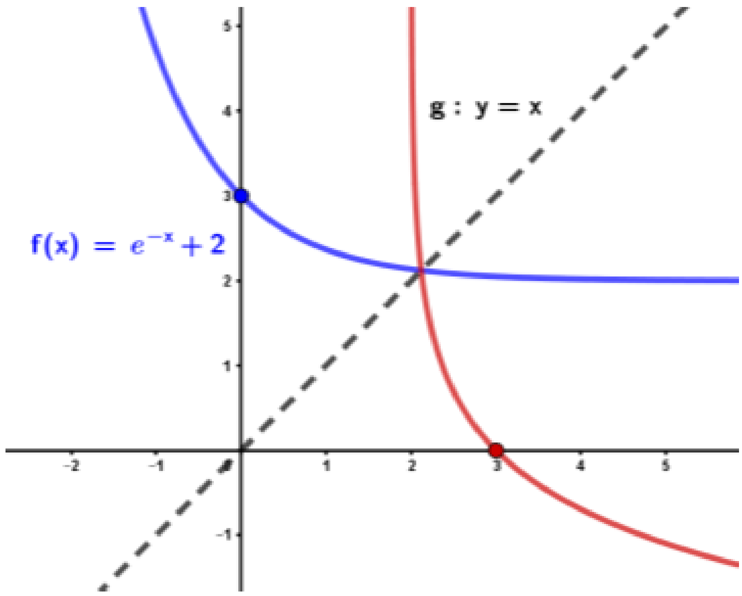
B4. $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$

$\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=-(-\infty)=+\infty$

Διότι: $\lim\limits_{x\to2^+}\ln(x-2)=\lim\limits_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

Θέτουμε $x-2=u$ για $x\to2^+$ τότε

$u\to0^+$



Θέμα Γ

Γ1. $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$

αφού η f παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ θα είναι και συνεχής στο $x_0=1$ από

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+\alpha\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+\beta=1+\alpha \Leftrightarrow \alpha=\beta$$

Επαναδιατυπώνοντας

$$f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\alpha\cdot x, & x<1 \end{cases}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ πρέπει

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha\cdot x-(1+\alpha)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1+\alpha(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\alpha=2 \Leftrightarrow 1+\alpha=2 \Leftrightarrow \alpha=1 \text{ οπότε και } \beta=1.$$

Διότι $\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}$ (εφαρμόζεται ο κανόνας DLH) $\lim_{x\to 1}\frac{\left(e^{x-1}-1\right)'}{(x-1)'}$

$$=\lim_{x\to 1}e^{x-1}=e^0=1.$$

Γ2. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$			$+$
$f'(x)$	$+$		
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Για $x>1$ έχουμε f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=2x>0$ και f συνεχής $(-\infty,\ 1)$ τότε f γνησίως αύξουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Για $x<1$ έχουμε f παραγωγίσιμη ως αλγοριθμικό άθροισμα παραγωγίσιμων με $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ και f συνεχής στο $(1,\ +\infty)$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 1)$

αφού f συνεχής στο $x_0=1$ τότε f είναι γνησίως αύξουσα στην ένωση των διαστημάτων δηλαδή στο $\mathbb{R}$.

Εύρεση συνόλου τιμών

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$$

$\Delta_1=(-\infty,\ 1]$ $\qquad \Delta_2=(1,\ +\infty)$

$$f_{\Delta_1} \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\underset{f\ \text{Β}}{=}} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x),\ f(1)\right]=(-\infty,\ 2]$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$

και αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-1}-\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\kappa}=0$

θέτω $\kappa=x-1$

$x\to-\infty$

$\kappa\to-\infty$

$$f_{\Delta_2} \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\underset{f\ \text{Β}}{=}} \left(\lim_{x\to1^+} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=(2,\ +\infty)$$

άρα $f_{\Delta}=f_{\Delta_1}\cup f_{\Delta_2}=(-\infty,\ 2]\cup(2,\ +\infty)=\mathbb{R}$.

Γ3. **i)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ άρα υπάρχει $\kappa<0$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)<0$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \overset{f\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{=} f(0) = \frac{1}{e} > 0$ άρα υπάρχει $\kappa < \lambda < 0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda) > 0$.

Οπότε η f συνεχής στο $[\kappa,\ \lambda] \subseteq (-\infty,\ 0)$ ως άθροισμα εκθετικής

και πολυωνυμικής

- $f(\kappa)\cdot f(\lambda) < 0$

από Θ. Bolzano υπάρχει ένα $x_0 \in (\kappa,\ \lambda)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,\ 0)$ άρα το x_0: μοναδική ρίζα της f

στο $(-\infty,\ 0)$.

ii) $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$

Θεωρούμε $\varphi(x) = f^2(x) - x_0 f(x),\ D_\varphi = (x_0,\ +\infty)$

Έστω ότι υπάρχει $\rho > x_0$ τέτοιο ώστε

$\varphi(\rho) = 0 \Leftrightarrow f^2(\rho) - x_0 f(\rho) = 0$

$f(\rho)(f(\rho) - x_0) = 0$

$$\begin{matrix} f(\rho) \in \mathbb{R} \\ f(\rho) - x_0 \in \mathbb{R} \end{matrix} = \begin{cases} f(\rho) = 0 \\ \quad \acute{\eta} \\ f(\rho) = x_0 \end{cases} \text{Αδύνατο διότι}$$

- $f(\rho) = 0$ Αδύνατη αφού $\rho > x_0 \overset{f\ \mathrm{B}}{\Rightarrow} f(\rho) > f(x_0) \overset{\mathrm{B}}{\Rightarrow} f(\rho) > 0$
- $f(\rho) = x_0$ αδύνατη αφού $f(\rho) > 0$ και $x_0 < 0$.

Γ4. $\mathrm{M}(x,\ y) \qquad y = f(x),\ x \geq 1$

t_0: $x_{(t_0)} = 3,\ y_{(t_0)} = 10$

$x'_{(t)} = 2 \quad \mu o\nu/\sec.$

Για το εμβαδόν έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}|OK||KM|$$

$$|OK| = |x| = x$$

$$|KM| = f(x)$$

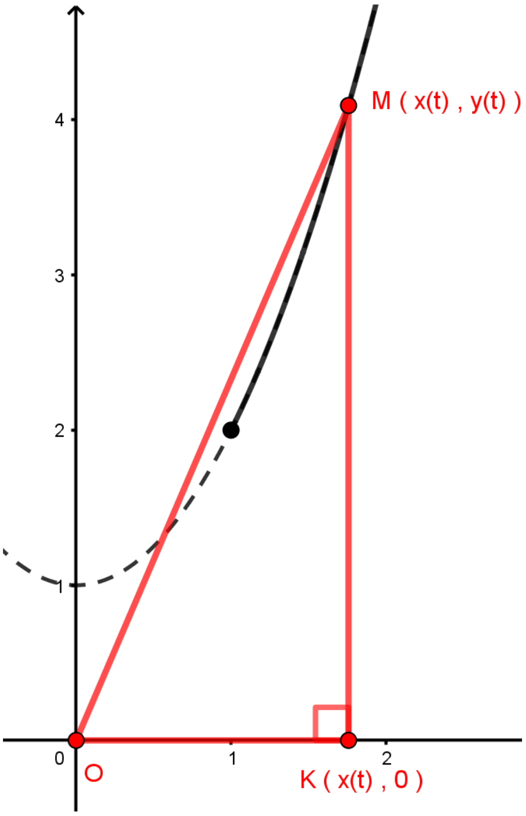
$$E = \frac{1}{2}x \cdot f(x)$$

$$E_{(t)} = \frac{1}{2}x_{(t)} \cdot f_{(x(t))}$$

$$E'_{(t)} = \frac{1}{2}x'_{(t)} \cdot f_{(x(t))} + \frac{1}{2}x_{(t)} \cdot \left(f_{(x(t))}\right)'$$

$$E'_{(t_0)} = \frac{1}{2}x'_{(t_0)} \cdot y_{(t_0)} + \frac{1}{2}x_{(t_0)} \cdot y'_{(t_0)}$$

$$E'_{(t_0)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 12 = 28 \quad \tau.\mu./s$$



Θέμα Δ

Δ1 $f(x) = (x-1) \cdot \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) + \alpha x + \beta$

η f παραγωγίσιμη ως $f'(x) = \ln\left(x^2 - 2x + 2\right) + (x-1)\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2} + \alpha$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,\ 1)$ είναι $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y = f'(1) \cdot x + f(1) - f'(1)$

άρα προκύπτει το (Σ)

Πρέπει $\begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) - f'(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta = 2$ και $\alpha = -1$

Δ2 $E = \int_1^2 |f(x) - \varepsilon|\,dx = \int_1^2 \left|(x-1) \cdot \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)\right| dx =$

$\stackrel{*}{=} \int_1^2 (x-1) \cdot \ln\left((x-1)^2 + 1\right) dx$

* όταν $1 \le x \le 2$

- $x-1\geq 0$ οπότε $|f(x)|=f(x)$ για $x\in[1,\ 2]$.
- $\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq \ln 1>0$

Θέτουμε $x-1=u$
- $du=dx$
- $x=1\to u=0$
  $x=2\to u=1$

άρα $\text{E}=\int_0^1 u\cdot\ln\left(u^2+1\right)du=\int_0^1\left(\frac{u^2}{2}\right)'\cdot\ln\left(u^2+1\right)du$

$=\left[\frac{u^2}{2}\cdot\ln\left(u^2+1\right)\right]_0^1-\int_0^1\frac{u^2}{2}\cdot\ln\left(u^2+1\right)'du$

$=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{u^2}{2}\cdot\frac{1}{u^2+1}\cdot 2udu=$

$=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{u^3}{u^2+1}du$

Υπολογισμός $\int_0^1\frac{u^3}{u^2+1}du$

Εκτελούμε τη διαίρεση

$u^3:(u^2+1)$ άρα $u^3=u\cdot\left(u^2+1\right)-u$ οπότε $\int_0^1\frac{u^3}{u^2+1}du=\int_0^1 udu-\int_0^1\frac{u}{u^2+1}du$

$=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(u^2+1\right)'}{u^2+1}du$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\ln\left(u^2+1\right)\right]_0^1$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$

άρα $\text{E}=\frac{1}{2}\ln 2-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 2=\ln 2-\frac{1}{2}$ *τ.μ.*

Δ3 **i)** Να δείξετε ότι $f'(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

$f(x)=(x-1)\ln\left((x-1)^2+1\right)-x+2$

$f'(x)=(x-1)'\ln\left(x^2-2x+2\right)+(x-1)\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}-1$$

$$f'(x)\geq -1 \Leftrightarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1$$

$$\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$$

• $\ln\left(\left(x-1\right)^2+1\right)\geq \ln 1>0$

• $2\left(x-1\right)^2\geq 0$

• $\left(x-1\right)^2+1\geq 1>0$

Για $x=1$ ισχύει η ισότητα.

ii) $f(x)=\left(x-1\right)\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+\frac{3}{2}+2-2$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\geq\left(\lambda-1\right)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)-\lambda+2$$

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\geq f\left(\lambda\right)$ ΘΜΤ στο $\left[\lambda,\ \lambda+\frac{1}{2}\right]$ (ικανοποιούνται οι συνθήκες)

$$\frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f\left(\lambda\right)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=f'\left(\xi\right)\geq -1$$

$$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f\left(\lambda\right)\geq\frac{1}{2}$$

Δ4

$$f(x)=\left(x-1\right)\cdot\ln\left(x^2-2x+2\right)-x+2$$

$$g(x)=-x^3-x+2$$

$$f'(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)+\frac{2\left(x-1\right)^2}{x^2-2x+2}-1$$

$$g'(x)=-3x^2-1$$

Επειδή f, g, και ε: $y=-x+2$ είναι συνεχείς – παραγωγίσιμες έχουμε:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-\varepsilon}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x-1\right)\ln x^2-2x+2}{x-1}=0$

άρα η (ε) εφάπτεται στην C_f στο $x_0 = 1$

β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-\varepsilon}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3}{x} = 0$

άρα η (ε) εφάπτεται στην C_y στο $x_0 = 0$.

Συμπέρασμα η $y = -x+2$ είναι κοινή εφαπτομένη της C_f και C_g.

Εφαπτομένη της C_g στο $\left(0,\ g\left(0\right)\right)$

$y - g\left(0\right) = g'\left(0\right)\left(x-0\right)$

$y - 2 = -x$

$y = -x+2$

Θα βρούμε την εφ της C_f στο $x_0 = 1$.

$y - f\left(1\right) = f'\left(1\right)\left(x-1\right)$

$y - 1 = -1\left(x-1\right)$

$y = -x+2$

Παρατηρούμε ότι οι f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη την $y = -x+2$.

Επειδή $f'(x) \geq -1$ (το ίσο για $x=1$) και

$g'(x) = -3x^2 - 1 \leq -1$ (το ίσο για $x = 0$)

Είναι $g'\left(x_1\right) \neq f'\left(x_2\right)$ έτσι η $y = -x+2$ είναι μοναδική.

Η $g'\left(x_1\right) = f'\left(x_2\right)$ δεν έχει άλλο ζευγάρι λύσεων.

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

Αξιολόγηση θεμάτων

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, διατυπωμένα με σαφήνεια, καλύπτουν σχεδόν όλη την ύλη βασισμένα στο Σχολικό Βιβλίο