Ενδεικτικές απαντήσεις της γραπτής δοκιμασίας

Μάιος 2020

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ ΝΕΑ ΠΑΙΔΕΙΑ
Τομέας Μαθηματικών

Θέμα Α

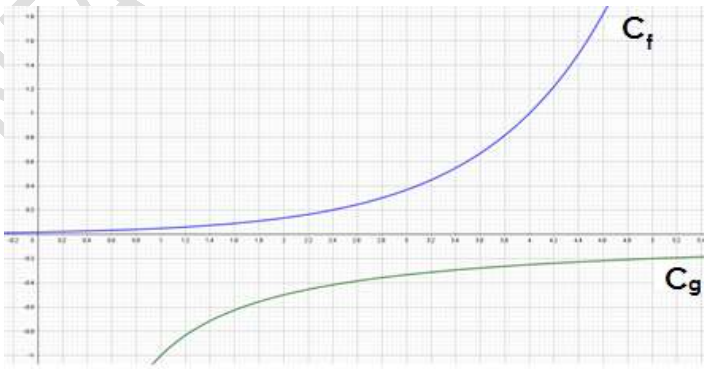
Α1. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Α2.Α. Ψ

Α2.Β. Το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ με g(x) < 0 κοντά στο +∞. Επομένως

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{g(x)}=-\infty$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)=-\infty$$



Α3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ε της C_f μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f, στο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ είναι η παράγωγος της f στο x_0.

Δηλαδή, είναι $\lambda=f'(x_o)$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Την κλίση $f'(x_0)$ της εφαπτομένης ε στο $A(x_o, f(x_o))$ θα τη λέμε και <u>κλίση</u> της C_f στο Α ή κλίση της f στο x_o.

Α4. α. Λ β. Λ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

Θέμα Β

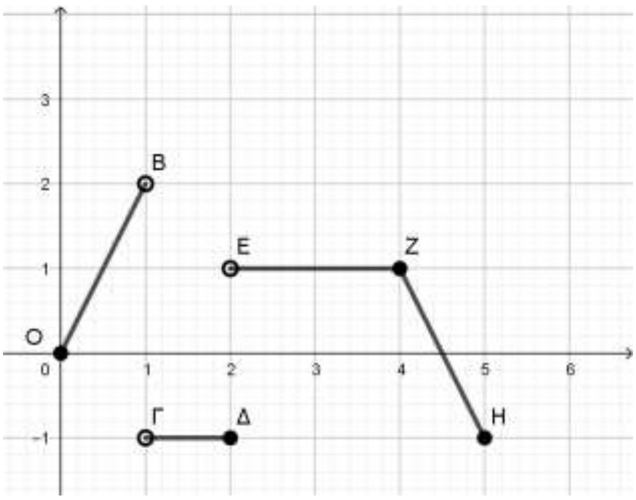
Β1.(α) Η f είναι συνεχής και έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και 5, επομένως στα διαστήματα $(-\infty,2)$, $(2,5)$ και $(5,+\infty)$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα στο $(-\infty,2)$ διατηρεί πρόσημο και αφού f(0) = 1 > 0 για κάθε $x(-\infty,2)$ θα είναι f(x) > 0. Επομένως f(1) > 0.

(β). Επειδή στο $(2,5)$ η f ως συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο θα είναι παντού θετική ή παντού αρνητική. Τα $3,4\in(2,5)$ επομένως οι f(3), f(4) είναι ομόσημοι άρα $f(3)\cdot f(4)>0$.

(γ). Στο [0,2] θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(x+1)\cdot f(x+2)$. Η h είναι συνεχής ως πράξη συνεχών και

$$h(0)=f(0)-f(1)\cdot f(2)=2-f(1)\cdot 0=1$$
$$h(2)=f(2)-f(3)\cdot f(4)=0-f(3)\cdot f(4)<0$$ (λόγω του (β) ερωτήματος)

Τελικά $h(0)\cdot h(2)<0$ επομένως από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $h(\alpha)=0\Leftrightarrow f(\alpha)=f(\alpha+1)\cdot f(\alpha+2)$.



Β2α. Αφού η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ και συνεχής στο $[0,1]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Αφού η $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(1,2)$ και συνεχής στο $[1,2]$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

Αφού η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(2,4)$ και συνεχής στο $[2,4]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,4]$.

Αφού η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(4,\frac{9}{2}\right)$ και συνεχής στο $\left[4,\frac{9}{2}\right]$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[4,\frac{9}{2}\right]$.

Αφού η $f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{9}{2},5\right)$ και συνεχής στο $\left[\frac{9}{2},5\right]$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{9}{2},5\right]$.

Β2β. Η f' είναι συνεχής στο $x_0=0$ γιατί υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=f'(0)=0$.

Η f' είναι ασυνεχής στο $x_0=1$ γιατί δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$.

Η f' είναι ασυνεχής στο $x_0=2$ γιατί δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 2} f'(x)$.

Η f' είναι συνεχής στο $x_0=4$ γιατί υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 4} f'(x)=f'(4)=1$.

Η f' είναι συνεχής στο $x_0=5$ γιατί υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 5^-} f'(x)=f'(5)=-1$.

Τελικά η f' είναι συνεχής για κάθε $x\in[0,1)\cup(1,2)\cup(2,5]$

Β2γ.

Β2γ. Η $f'(x)=2x$ για κάθε $x\in(0,1)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, τότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ η $f(x)=x^2+c_1$. Επίσης από υπόθεση $f(0)=0$, άρα το $c_1=0$ και η $f(x)=x^2$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Η $f'(x)=-1$ για κάθε $x\in(1,2)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[1,2]$, τότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ η $f(x)=-x+c_2$. Επίσης αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=1$ τότε $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}(-x+c_2)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 \Leftrightarrow c_2=2$ και η $f(x)=-x+2$ για κάθε $x\in[1,2]$

Η $f'(x)=1$ για κάθε $x\in(2,4)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[2,4]$, τότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ η $f(x)=x+c_3$. Επίσης αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=2$ τότε:

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim_{x\to 2^+}(x+c_3)=\lim_{x\to 2^-}(-x+2)\Leftrightarrow c_3=-2$

και η $f(x)=x-2$ για κάθε $x\in[2,4]$

Η $f'(x)=-2x+9$ για κάθε $x\in(4,5)$ και αφού η f είναι συνεχής στο $[4,5]$, τότε από συνέπειες Θ.Μ.Τ η $f(x)=-x^2+9x+c_4$. Επίσης αφού η f είναι συνεχής στο $x_0=4$ τότε: $\lim_{x\to 4} f(x)=f(4)\Leftrightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^-} f(x)=f(4)\Leftrightarrow$

$\lim_{x\to 4^+}(-x^2+9x+c_4)=\lim_{x\to 4^-}(x-2)\Leftrightarrow c_4=-18$ και η

$f(x)=-x^2+9x-18$ για κάθε $x\in[4,5]$

Τελικά $f(x)=\begin{cases} x^2\ , & \text{για } 0\le x<1 \\ -x+2, & \text{για } 1\le x<2 \\ x-2, & \text{για } 2\le x<4 \\ -x^2+9x-18, & \text{για } 4\le x\le 5 \end{cases}$

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση γράφεται στη μορφή $f(x)=\begin{cases} -\ln x, & \alpha\nu\ 0<x<1 \\ \ln x\ , & \alpha\nu\ x\ge 1 \end{cases}$.

- Για $0 < x < 1$ έχουμε ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{x}$.
- Για $x > 1$ έχουμε ότι $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

Για $x\neq 1$θα έχουμε:

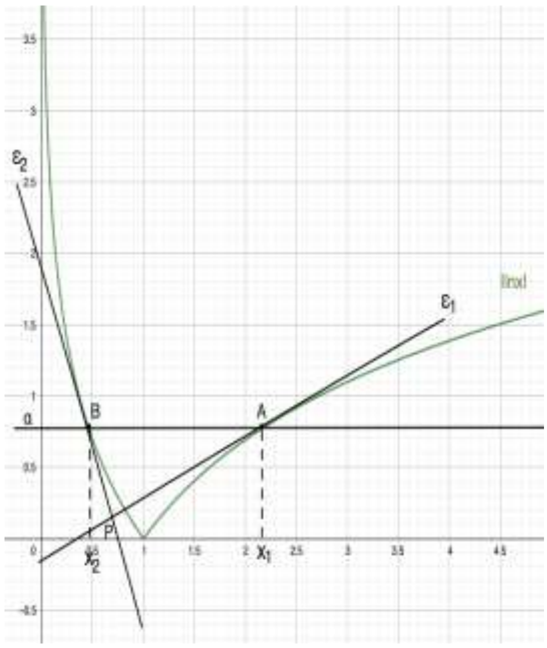
$\ell im_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell im_{x\to 1^-}\dfrac{-\ell nx}{x-1}=-1$, αφού θεωρώντας τη συνάρτηση $\sigma(x)=-\ell nx,\ x>0$ για κάθε x > 0 θα ισχύει ότι $\sigma'(x)=(-\ell nx)'=-\dfrac{1}{x}$, επομένως το ζητούμενο όριο θα ισούται με $\sigma'(1)=-1$.

Επίσης $\ell im_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\ell im_{x\to 1^+}\dfrac{\ell nx}{x-1}=1$, αφού θεωρώντας τη συνάρτηση $\varphi(x)=\ell nx,\ x>0$ για κάθε $x>0$ θα ισχύει ότι $\varphi'(x)=(\ell nx)'=\dfrac{1}{x}$ επομένως το ζητούμενο όριο θα ισούται με $\varphi'(1)=1$.

Έτσι καταλήγουμε στο ότι $\ell im_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq \ell im_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$, δηλαδή η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 1$.

Θα ισχύει $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & \text{αν } 0<x<1\\ \dfrac{1}{x}, & \text{αν } x>1\end{cases}$.

Γ2. Επειδή η συνάρτηση f είναι 1-1 σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ για τις τετμημένες των σημείων Α και Β θα ισχύει χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 < x_1 < 1 < x_2$ όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.



Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) στο σημείο $A(x_1,\alpha)$ είναι η $(\varepsilon_1): y-\alpha=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_2) στο σημείο $B(x_2,\alpha)$ είναι η $(\varepsilon_2): y-\alpha=-\dfrac{1}{x_2}(x-x_2)$.

Το σημείο $P(\kappa,\lambda)$ επαληθεύει τις δυο εξισώσεις άρα:

$$\left.\begin{aligned}\lambda-\alpha&=\frac{1}{x_1}(\kappa-x_1)\\ \lambda-\alpha&=-\frac{1}{x_2}(\kappa-x_2)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\kappa=\dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\\ \lambda=\alpha+\dfrac{x_2-x_1}{x_1+x_2}\end{cases}$$

i. Είναι $\begin{cases}\alpha=\ell n x_1\\ \alpha=-\ell n x_2\end{cases}\Rightarrow \ell n x_1=-\ell n x_2\Rightarrow \ell n(x_1x_2)=0\Rightarrow x_1x_2=1$.

Επίσης $\lambda_A=\dfrac{1}{x_1}$ και $\lambda_B=-\dfrac{1}{x_2}$ άρα $\lambda_A\cdot\lambda_B=-\dfrac{1}{x_1\cdot x_2}=-1$, επομένως οι εφαπτομένες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

ii. Η παράσταση S γράφεται στη μορφή:

$$S=\kappa^2+(\lambda-\alpha)^2=\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2+\left(\frac{x_2-x_1}{x_1+x_2}\right)^2=\frac{4(x_1x_2)^2+(x_2-x_1)^2}{(x_1+x_2)^2}\overset{x_1x_2=1}{=}$$

$$=\frac{4+x_2^2-2x_1x_2+x_1^2}{(x_1+x_2)^2}=\frac{x_2^2+2x_1x_2+x_1^2}{(x_1+x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2}{(x_1+x_2)^2}=1$$

που είναι ανεξάρτητη του α.

Γ3. Η ανισότητα γίνεται $x^{\mu}-1\le\mu\cdot(x-1)\Leftrightarrow x^{\mu}-\mu\cdot x+\mu\le 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^{\mu}-\mu\cdot x+\mu$, x>0.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με: $g'(x)=\mu x^{\mu-1}-\mu\Leftrightarrow g'(x)=\mu\left(x^{\mu-1}-1\right)$.

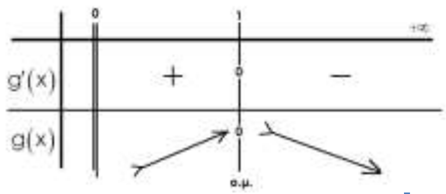
$$g'(x)\ge 0\Leftrightarrow \mu\left(x^{\mu-1}-1\right)\ge 0\overset{\mu>0}{\Leftrightarrow}x^{\mu-1}-1\ge 0\Leftrightarrow x^{\mu-1}\ge 1\Leftrightarrow$$

$$\overset{\ell nx:\nearrow}{\Leftrightarrow}(\mu-1)\ell nx\ge 0\overset{\mu-1<0}{\Leftrightarrow}\ell nx\le 0\Leftrightarrow x\le 1$$

Δηλαδή η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα παρουσιάζει η g έχει μέγιστο στο x_o = 1 το g(1) = 0.

Συνοπτικά έχουμε τον διπλανό πίνακα:



Επειδή η συνάρτηση g παρουσιάζει μέγιστο στο $x_o = 1$ θα ισχύει ότι $g(x) \le g(1) \Leftrightarrow g(x) \le 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε $x^{\mu} - 1 \le \mu \cdot (x-1)$.

Γ4. Αν η μια πλευρά είναι $\alpha = ημx$ τότε η άλλη θα είναι $\beta = \dfrac{4-2ημx}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta = 2 - ημx$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = ημx \cdot (2 - ημx)$, $0 < x < \pi$, η οποία εκφράζει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και θα βρούμε τη μέγιστη τιμή της.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη με:

$$h'(x) = συνx \cdot (2 - ημx) - ημx \cdot συνx \Leftrightarrow$$
$$h'(x) = 2συνx \cdot (1 - ημx)$$

$$h'(x) \ge 0 \Leftrightarrow 2συνx \cdot (1 - ημx) \ge 0 \overset{1-ημx \ge 0}{\Leftrightarrow} συνx \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{\pi}{2}$$

Συνοπτικά έχουμε τον διπλανό πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	1 ο.μ.	$\searrow$	

Επομένως το μέγιστο δυνατό εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ θα ισούται με την τιμή

$$h(x) = ημ\frac{\pi}{2} \cdot \left(2 - ημ\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Θέμα Δ

Δ1.(α) Για $x = y = 1$ από την αρχική σχέση προκύπτει:

$$f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) \overset{f(x) \ne 0}{\Leftrightarrow} f(1) = 1$$

Για $x > 0$ και $y = \dfrac{1}{x}$ από την αρχική σχέση προκύπτει:

$$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$$

Δ1(β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο διάστημα $(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό και αφού f(1)=1>0 συμπεραίνουμε ότι : $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Επιπλέον, από την υπόθεση έχουμε ότι f(0)= 0 οπότε τελικά προκύπτει ότι:

$f(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$

Δ1.(γ) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο ρ > 0, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}=f'(\rho).$$

Για να είναι η f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ αρκεί να δείξουμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο **τυχαίο** $x_0\in(0,+\infty)$

Έστω, $x_0\in(0,+\infty)$, τότε για κάθε $x_0\in(0,+\infty)$ με $x\neq x_0$.

Θέτουμε $x=x_o\cdot\frac{h}{\rho}$, $h>0$, οπότε όταν $x\to x_o$ το $h\to\rho$

Και έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f\left(x_0\frac{h}{\rho}\right)-f(x_0)}{x_0\frac{h}{\rho}-x_0}=\frac{f(x_0)f\left(\frac{h}{\rho}\right)-f(x_0)}{\frac{x_0(h-\rho)}{\rho}}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f\left(h\frac{1}{\rho}\right)-1}{h-\rho}=$$

$$=\frac{\rho f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f(h)f\left(\frac{1}{\rho}\right)-1}{h-\rho}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0}\cdot\frac{f(h)\frac{1}{f(\rho)}-1}{h-\rho}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}\cdot\frac{f(h)-f(\rho)}{h-\rho}$$

Ισχύει :

- $\lim_{h\to a}\frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}=\frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}$

 Έχεις τα πινέλα, έχεις τα χρώματα, ζωγράφισε τον παράδεισο και μπες μέσα.

Νίκος Καζαντζάκης

- $\lim\limits_{h\to a}\dfrac{f(h)-f(\rho)}{h-\rho}=f'(\rho)$

Επομένως,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to a}\left(\frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}\cdot\frac{f(h)-f(\rho)}{h-\rho}\right)=\lim_{h\to a}\frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}\cdot\lim_{h\to a}\frac{f(h)-f(\rho)}{h-\rho}=$$
$$=\frac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}\cdot f'(\rho)$$

Άρα, η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x\in(0,+\infty)$ με $f'(x_0)=\dfrac{\rho f(x_0)}{x_0 f(\rho)}\cdot f'(\rho)$ οπότε, είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με τύπο: $f'(x)=\dfrac{\rho f(x)}{x f(\rho)}f'(\rho)$

Άρα, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{\rho f(x)}{x f(\rho)}f'(\rho)\Leftrightarrow\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\dfrac{\rho f'(\rho)}{f(\rho)}$

Δ2. Είναι: $M(\rho,f(\rho))\in(\varepsilon)\Leftrightarrow\rho-2\sqrt{\rho}\cdot f(\rho)+\rho=0\Leftrightarrow2\sqrt{\rho}\cdot f(\rho)=2\rho\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\rho)=\dfrac{2\rho}{2\sqrt{\rho}}\Leftrightarrow f(\rho)=\sqrt{\rho}$

Επίσης, $f'(\rho)=\dfrac{1}{2\sqrt{\rho}}$.

Επομένως,

$$\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{\rho\cdot\frac{1}{2\sqrt{\rho}}}{\sqrt{\rho}}\Leftrightarrow\frac{xf'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2x}\Leftrightarrow(\ln f(x))'=\left(\frac{1}{2}\ln x\right)'$$
$$\Leftrightarrow\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln x+c\Leftrightarrow\ln f(x)=\ln\sqrt{x}+c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Για x = ρ έχουμε:

$$\ln(f(\rho))=\ln\sqrt{\rho}+c\Leftrightarrow\ln\sqrt{\rho}=\ln\sqrt{\rho}+c\Leftrightarrow c=0$$

Οπότε, $\ell n f(x) = \ell n\sqrt{x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$

Επειδή η συνάρτηση είναι ορισμένη και συνεχής στο $x_0 = 0$ με $f(0) = 0$ έχουμε: $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.