



ΤΡΙΩΡΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Γ
ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΙΟΣ 2020

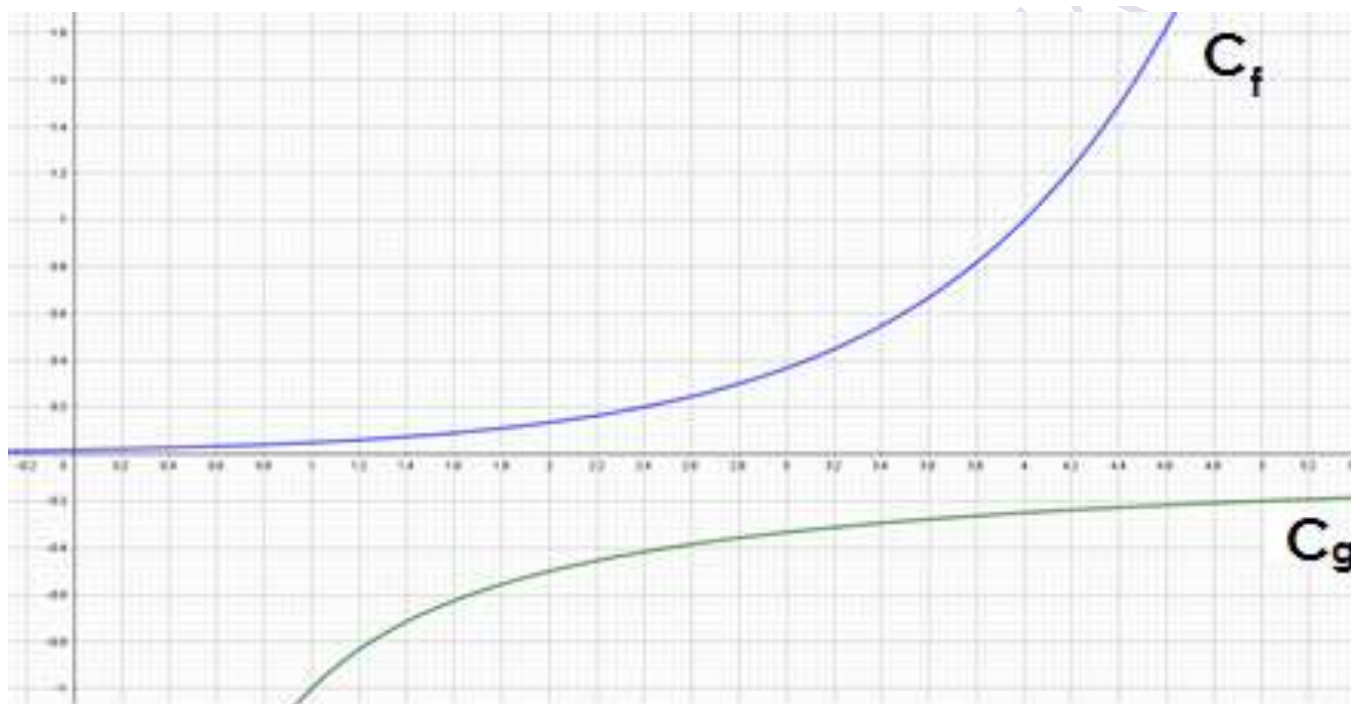


Θέμα Α

A1. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

5 Μονάδες

A2. Δίνονται οι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ που βλέπετε στο παρακάτω σχήμα και τον ισχυρισμό:



«Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

4 Μονάδες

1 Έχεις τα πινέλα, έχεις τα χρώματα, ζωγράφισε τον παράδεισο και μπες μέσα.

Νίκος Καζαντζάκης

A3. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

6 Μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

(α). Αν $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ και υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $m \leq f(x) \leq M$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f έχει ελάχιστο το m και μέγιστο το M .

(β). Η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

(γ). Αν δύο συναρτήσεις f και g που ορίζονται σε ένα διάστημα Δ είναι γνησίως αύξουσες στο Δ τότε και η $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

(δ). Έστω οι συναρτήσεις f, g, h οι οποίες ορίζονται κοντά στο x_0 και για κάθε x κοντά στο x_0 ισχύουν:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \beta \quad \text{και}$$

υπάρχει το όριο της f στο x_0 τότε $\alpha \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \beta$

(ε). Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

5x 2 = 10 Μονάδες

Θέμα Β

Β1. Έστω η συνεχής συνάρτηση f στο σύνολο των πραγματικών αριθμών της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες μόνο στα σημεία $A(0,1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(5,0)$. Να αποδείξετε ότι:

(α). $f(1) > 0$.

3 Μονάδες

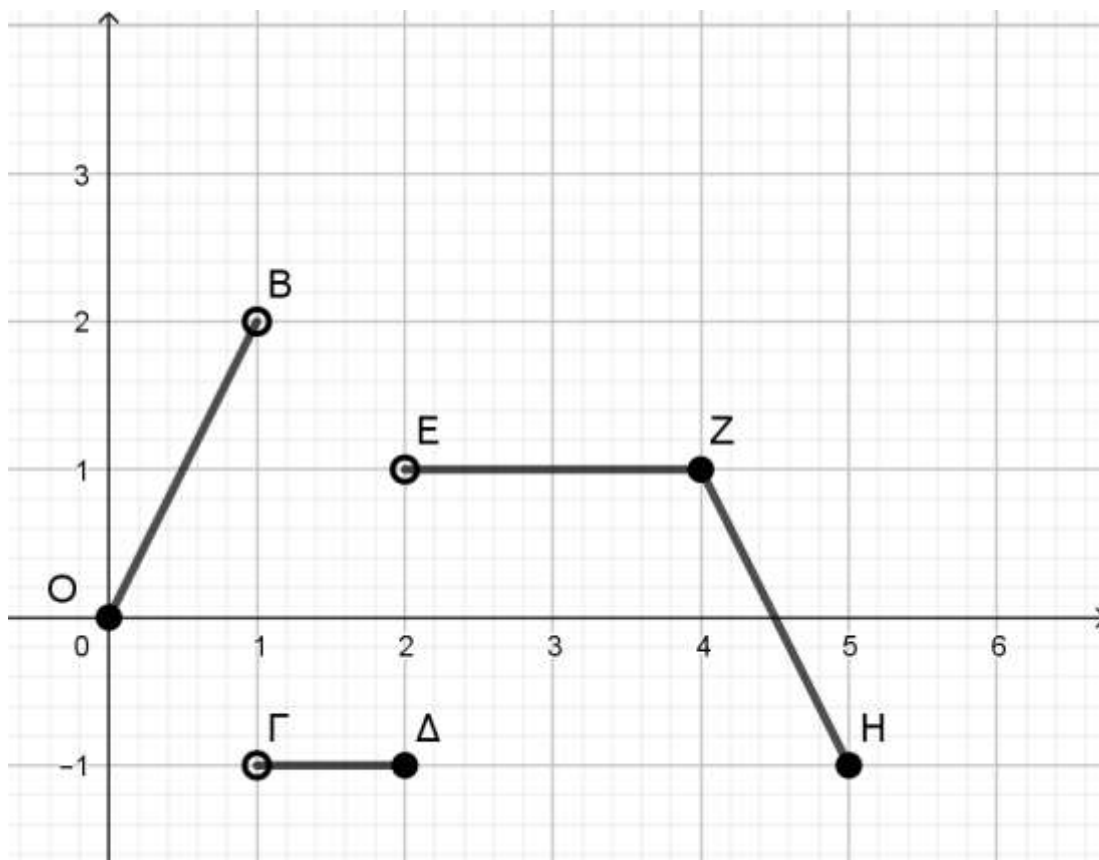
(β). $f(3) \cdot f(4) > 0$.

4 Μονάδες

(γ). Υπάρχει ένας τουλάχιστον $a \in \mathbb{R}$ ώστε : $f(a) = f(a+1) \cdot f(a+2)$

4 Μονάδες

B2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $[0,5]$.



(α). Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία στο $[0,5]$.

3 Μονάδες

(β). Να μελετήσετε την f' ως προς την συνέχεια στο $[0,5]$.

4 Μονάδες

(γ). Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, να βρείτε τον τύπο της στο $[0,5]$.

7 Μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |\ln x|$.

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

5 Μονάδες

Γ2. Έστω η ευθεία με εξίσωση $y=a$, $a > 0$ η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στα σημεία A και B με τετμημένες x_1 και x_2 αντίστοιχα και $P(\kappa, \lambda)$ το σημείο τομής των εφαπτομένων ευθειών της C_f στα σημεία A και B .

i. Να δείξετε ότι οι εφαπτομένες στα A, B είναι κάθετες μεταξύ τους για κάθε $a > 0$.

5 Μονάδες

ii. Να δείξετε ότι η παράσταση $S = \kappa^2 + (\lambda - a)^2$ είναι ανεξάρτητη του a .

5 Μονάδες

Γ3. Αν $\mu \in (0, 1)$ και $x \in (0, +\infty)$ να αποδείξετε ότι $x^\mu - 1 \leq \mu \cdot (x - 1)$.

5 Μονάδες

Γ4. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ για το οποίο γνωρίζουμε τα εξής:

- Οι πλευρές του έχουν άθροισμα 4cm.
- Η μικρότερη πλευρά του είναι ίση με $\eta\mu x$, $0 < x < \pi$.

Να βρείτε το μέγιστο δυνατό εμβαδόν του ορθογωνίου αυτού.

5 Μονάδες

Θέμα Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$.
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$.
- $f(0) = 0$.
- είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο της ρ με $\rho > 0$

Δ1. Να δείξετε ότι:

(α). $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x > 0$.

5 Μονάδες

(β). $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$.

5 Μονάδες

(γ). Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} = \frac{\rho f'(\rho)}{f(\rho)}, \text{ για κάθε } x > 0.$$

7 Μονάδες

Δ2. Αν η ευθεία $(\varepsilon): x - 2\sqrt{\rho}y + \rho = 0$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\rho, f(\rho))$, να βρείτε τον τύπο της f .

8 Μονάδες