

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω συνάρτηση $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x > 0$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Μονάδες 8

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. Μονάδες 5

A3. « Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$, είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0$ ».

Να χαρακτηρίσετε την παραπάνω πρόταση, γράφοντας στο τετράδιο σας το χαρακτηρισμό *Σωστή*, αν είναι σωστή, ή το χαρακτηρισμό *Λανθασμένη*, αν είναι λανθασμένη (Μονάδα 1). Κατόπιν αιτιολογήστε την απάντησή που δώσατε. (Μονάδες 3) (Μονάδες 4)

A4. Σημειώστε Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις:

Μονάδες 8

(α) Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει με την γραφική παράσταση C_f τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

(β) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών του παραπάνω διαστήματος θα είναι ανοικτό διάστημα.

(γ) Αν $A(x_0, y_0)$ σημείο της γραφικής παράστασης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f , τότε θα είναι $(f \circ f^{-1})(y_0) = y_0$.

(δ) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^2} = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell < 0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - 3x}{x} = 2, \quad F(9) = 0$$

- B1.** Να δείξετε ότι η C_F διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$. *Μονάδες 4*
- B2.** Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_F στο σημείο $O(0, F(0))$. *Μονάδες 4*
- B3.** Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = x - 6$ τέμνει την C_F σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 9)$. *Μονάδες 5*
- B4.** Αν η F' είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 9)$ στο οποίο η συνάρτηση F παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο. *Μονάδες 6*

ΘΕΜΑ Γ

Ευθεία ε περιστρέφεται γύρω από το σημείο της $P(4,3)$ διατηρώντας θετικό το συντελεστή διεύθυνσής της λ , ο οποίος μεταβάλλεται με ρυθμό 4 μονάδες το λεπτό. Κατά την διάρκεια της περιστροφής, η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία A και B .

- Γ1.** Να υπολογίσετε το ρυθμό που μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου OAB , τη στιγμή $t = t_0$ κατά την οποία η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $K(-2,2)$. *Μονάδες 7*

Κατά την παραπάνω χρονική στιγμή t_0 η ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \mu\sqrt{x+v}$ $\mu, v \in \mathbb{R}$ στο σημείο P .

- Γ2.** Να προσδιορίσετε τις τιμές των μ, v . *Μονάδες 6*
- Γ3.** Αν $\mu = 1, v = 5$ να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση. *Μονάδες 6*

- Γ4.** Να προσδιορίσετε την συνάρτηση g που είναι η σύνθεση της f με την f^{-1} και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , f^{-1} , g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $\varphi(x) = e^x + x - 5$ $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία. Μονάδες 6

- Δ2.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x_0 \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

- Δ3.** Δείξτε ότι για κάθε σημείο $M(x, \varphi(x))$ της γραφικής παράστασης της φ , απέχει από την ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 5$ απόσταση

$$d(x) = \frac{e^x - x}{\sqrt{5}} \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 6

- Δ4.** Να προσδιορίσετε το σημείο K της γραφικής παράστασης της φ , στο οποίο η παραπάνω απόσταση από την ευθεία ε γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Επιμέλεια: Γρηγόρης Μπαξεβανίδης