Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡ/ΚΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό απόδειξη σελίδας 116

Α2. Σχολικό ορισμός σελίδας 51

Α3. Λανθασμένη γιατί π.χ. αν $f(x)=x,\quad g(x)=-\frac{1}{x^2}$ τότε

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x=0$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$

Αλλά το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$ δεν υπάρχει αφού τα πλευρικά του δεν είναι ίσα.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)g(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(f(x)g(x)\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=+\infty$$

Α4. **(α)** Σωστό, **(β)** Λάθος, **(γ)** Σωστό, **(δ)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $g(x)=\dfrac{F(x)-3x}{x}$ με x κοντά στο 0. Τότε είναι $F(x)=x\,g(x)+3x$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=2$.

Η F είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη:

$$F(0)=\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\left(x\,g(x)+3x\right)=0\cdot 2+0=0.$$

Άρα το (0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της F.

Β2.: Η εφαπτομένη έχει εξίσωση: $\varepsilon:\ y-F(0)=F'(0)(x-0)$ (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,g(x)+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(g(x)+3\right)=5=F'(0)$$

Από (1) είναι $\varepsilon:\ y-0=5(x-0)\Leftrightarrow y=5x$

Β3. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $\varphi(x)=F(x)-x+6$ $x\in[0,9]$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον $x_0\in(0,9)$ ώστε $\varphi(x_0)=0\Leftrightarrow F(x_0)=x_0-6$.

Έτσι η ευθεία με εξίσωση $y=x-6$ τέμνει την C_F σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,9)$.

Β4. Είναι $F(0)=F(9)=0$. Έτσι εφαρμόζουμε θεώρημα Rolle στη F στο $[0,9]$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,9)$ έτσι ώστε $F'(\xi)=0$. Όμως η F' γνησίως αύξουσα με αποτέλεσμα

Για $x<\xi$ είναι $F'(x)<F'(\xi)\Leftrightarrow F'(x)<0$ F γν.φθίνουσα στο $[0,\xi]$

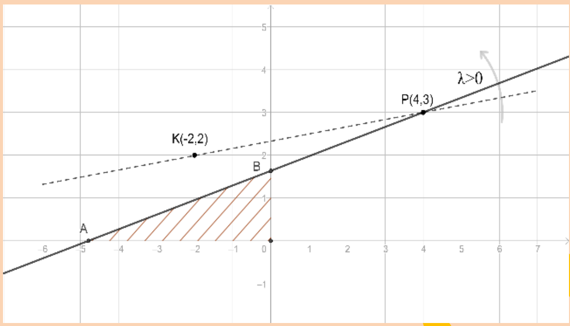
Για $x>\xi$ είναι $F'(x)>F'(\xi)\Leftrightarrow F'(x)>0$ F γν.αύξουσα στο $[\xi,9]$

Άρα η F παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $x=\xi$ που είναι μοναδικό.

– – – – – – –

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Τα μεταβλητά μεγέθη που θα μας απασχολήσουν είναι το εμβαδόν E και ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ε.



Η ευθεία ε έχει εξίσωση:

$y-3=\lambda(x-4) \quad \lambda>0 \quad (1)$

Η ε τέμνει τους άξονες στα σημεία Α, Β.

Η (1) για $y=0$ δίνει $x_A=\dfrac{4\lambda-3}{\lambda}$ και πάλι η (1) για $x=0$ δίνει $y_B=3-4\lambda$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι

$$E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|x_A|\,|y_B|=\frac{(4\lambda-3)^2}{2\lambda}.$$

Για κάθε χρονική στιγμή t είναι $E(t)=\dfrac{(4\lambda(t)-3)^2}{2\lambda(t)}$ και τότε

$$E'(t)=\frac{2(4\lambda(t)-3)\,4\lambda'(t)\lambda(t)-(4\lambda(t)-3)^2\lambda'(t)}{2\lambda^2(t)}=$$

$$=(4\lambda(t)-3)\lambda'(t)\frac{4\lambda(t)+3}{2\lambda^2(t)}=$$

$$=\lambda'(t)\frac{16\lambda^2(t)-9}{2\lambda^2(t)}=2\frac{16\lambda^2(t)-9}{\lambda^2(t)} \qquad (\lambda'(t)=4)$$

Τη στιγμή t_0 που η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο Κ είναι

$$\lambda(t_0)=\lambda_{PK}=\frac{3-2}{4+2}=\frac{1}{6}$$

Επομένως $\quad E'(t_0)=2\dfrac{16\lambda^2(t_0)-9}{\lambda^2(t_0)}=-616\ \mu^2/\min$

Γ2. Στο σημείο επαφής P ισχύουν:

$$f(4)=3 \Leftrightarrow \mu\sqrt{4+\nu}=3 \quad (2)$$

$$f'(4)=\lambda(t_0)=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\mu}{2\sqrt{4+\nu}}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\mu=2\sqrt{4+\nu} \quad (3)$$

Από (2), (3) προκύπτει: $\mu=1,\ \nu=5$

Γ3. Είναι $f(x)=\sqrt{x+5},\ x\ge -5$ συνεχής στο $[-5,+\infty)$ ως σύνθεση συνεχών με $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}>0,\ x>-5$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-5,+\infty)$ και έτσι είναι 1-1. Άρα αντιστρέφεται.

$$x\ge -5 \quad y=f(x)=\sqrt{x+5}$$
$$\Leftrightarrow y^2=x+5 \quad \text{με} \quad y\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x=y^2-5 \ \text{και ισχύει} \ x\ge -5$$

Άρα η αντίστροφη είναι $f^{-1}(x)=x^2-5,\ x\ge 0$

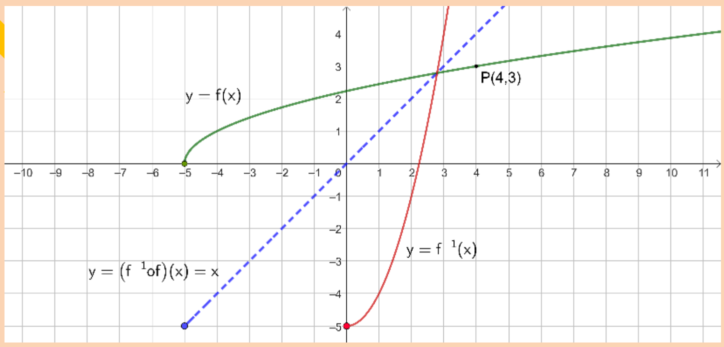
Γ4. Γνωρίζουμε ότι $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x \quad x\in D_f$

Άρα η ζητούμενη σύνθεση ορίζεται και έχει τύπο

$$g(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x,\quad x\in[-5,+\infty)$$

Η γραφική παράσταση της f σχεδιάζεται, αφού μεταφέρουμε κατά 5 μονάδες αριστερά την γραφική παράσταση της βασικής συνάρτησης $y=\sqrt{x},\ x\ge 0$.

Επίσης η αντίστροφη έχει γραφική παράσταση συμμετρική της C_f ως προς την διχοτόμο της $1^{ης}$ και $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.



– – – – – – –

Αγ.Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752 & 210 42 23 687
Αναπαύσεως 81 – Κερατσίνι – Τηλ 210 46 12 555

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. φ συνεχής ως άθροισμα συνεχών με $\varphi'(x)=e^x+1>0$. Άρα φ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\ldots=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\ldots=-\infty$

Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$\varphi(\mathbb{R})\overset{\varphi\text{ γν.αύξ}}{=}\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\ \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

$0\in\varphi(\mathbb{R})$ και φ γν.αύξουσα Έτσι υπάρχει μοναδικό x_0 ώστε $\varphi(x_0)=0$

Δ3. Κάθε σημείο $M(x,\varphi(x))$ της C_φ απέχει από την ευθεία ε απόσταση $d(x)=d(K,e)=\dfrac{|2x-\varphi(x)-5|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{|x-e^x|}{\sqrt5}\overset{(1)}{=}\dfrac{e^x-x}{\sqrt5}$

Αν $g(x)=e^x-x \quad x\in\mathbb{R}$ τότε $g'(x)=e^x-1$

Για $x>0 \quad g'(x)>0$, ενώ για $x<0 \quad g'(x)<0$.

Στο $x_0=0$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή $g(0)=1$.

Δηλαδή $g(x)\geq 1>0 \Leftrightarrow e^x-x>0 \quad x\in\mathbb{R}$ (1)

Δ4. $d'(x)=\dfrac{e^x-1}{\sqrt5}$ με $d'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Έτσι $d'(x)>0\Leftrightarrow x>0$ και $d'(x)<0\Leftrightarrow x<0$

Άρα η απόσταση $d(x)$ γίνεται ελάχιστη για $x=0$.

Τότε το σημείο είναι $K(0,-4)$

– – – – – – –

Επιμέλεια : Γρηγόρης Μπαξεβανίδης
Μαθηματικός