

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**  
**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. (α) Σχολικό σελ 76  
 (β) Σχολικό σελ 31, 33  
 (γ) Σχολικό σελ 73

A2. Σωστή, Λανθασμένη, Σωστή.

A3. Λανθασμένη

Αιτιολόγηση: π.χ. αν είναι  $f(x) = -x^2$ ,  $x \neq 0$  και  $g(x) = x^2$ ,  $x \neq 0$  τότε προφανώς ισχύει ότι  $f(x) < g(x)$  κοντά στο  $x_0 = 0$ , αλλά δεν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  αφού  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

A4. 1γ, 2α, 3α, 4δ, 5δ, 6β, 7δ, 8α

**ΘΕΜΑ Β**

B1. (α) Προκύπτει εύκολα ότι είναι συνεχής στο  $[-2,1) \cup (1,3) \cup (3,5]$  και ασυνεχής στο  $x_0 = 1$ .

(β) Η  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα (αποδεικνύεται με ορισμό) στο  $(3,5]$ . Έτσι το σύνολο τιμών είναι

$$f((3,5]) = \left( \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x), f(5) \right] = (1 - e^2, 0]$$

B2. (α) Για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με

$$x_1 < x_2$$

$$x_1^3 < x_2^3 \quad \text{και} \quad \ln x_1 < \ln x_2$$

$$x_1^3 + \ln x_1 < x_2^3 + \ln x_2$$

$$x_1^3 + \ln x_1 - e < x_2^3 + \ln x_2 - e$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752  
 Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

$$h(x_1) < h(x_2)$$

Έτσι η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

(β) Για κάθε  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  με

$$x_1 < x_2$$

$$h(x_1) < h(x_2) \quad (h \text{ γνησίως αύξουσα})$$

$$(g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$$

$$g(f(x_1)) < g(f(x_2))$$

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (g \text{ γνησίως αύξουσα})$$

Έτσι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θεωρούμε συνάρτηση  $g(x) = \frac{\Phi(2x) - 5}{2x^2 - 7x}$  με  $x$  κοντά στο 2.

Θα είναι  $\Phi(2x) = (2x^2 - 7x)g(x) + 5$  και  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\infty$ .

Τότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \Phi(x) &= \lim_{\omega \rightarrow 2} \Phi(2\omega) = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 2} [(2\omega^2 - 7\omega)g(\omega) + 5] = \\ &= (8 - 14)(-\infty) + 5 = \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Γ2. Το όριο έχει νόημα για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

• Για  $\alpha \neq 7$  είναι

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} (x^2 - 8x + 7)}{\lim_{x \rightarrow 7} (x - \alpha)} = \frac{0}{7 - \alpha} = 0$$

Αγ. Κωνσταντίνου 11 - Πειραιάς - τηλ 210 42 24 752  
Αναπαύσεως 81 - Κερατσίνι - Τηλ 210 46 12 555

- Για  $\alpha = 7$  είναι

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - \alpha} &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 8x + 7}{x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x-1)}{x-7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 7} (x-1) = 6\end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Για  $x \neq 0$  είναι

$$x \cdot f(x) + 3\eta\mu x = x^2$$

$$x \cdot f(x) = x^2 - 3\eta\mu x$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x}$$

Στο  $x_0 = 0$  επειδή η  $f$  είναι συνεχής θα έχουμε

$$\begin{aligned}f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 3 \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \\ &= 0 - 3 \cdot 1 = -3\end{aligned}$$

Άρα είναι  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3\eta\mu x}{x} & x \neq 0 \\ -3 & x = 0 \end{cases}$

- Δ2. (α)** Για  $x > 0$  είναι

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  εφαρμόζοντας κριτήριο παρεμβολής είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$  (1)

Τελικά το ζητούμενο όριο θα είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 3 \frac{\eta \mu x}{x} \right)^{(1)} = +\infty \quad (2)$$

(β)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20^{f(x)} - 19^{f(x)}}{2020^{f(x)} - 2019^{f(x)}} &\stackrel{(2)}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{20^{\omega} - 19^{\omega}}{2020^{\omega} - 2019^{\omega}} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{20^{\omega} \left( 1 - \frac{19^{\omega}}{20^{\omega}} \right)}{2020^{\omega} \left( 1 - \frac{2019^{\omega}}{2020^{\omega}} \right)} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{20}{2020} \right)^{\omega} \frac{1 - \left( \frac{19}{20} \right)^{\omega}}{1 - \left( \frac{2019}{2020} \right)^{\omega}} \right) = 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Αφού  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{20}{2020} \right)^{\omega} = 0$  και  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{19}{20} \right)^{\omega} = 0$ ,  $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{2019}{2020} \right)^{\omega} = 0$

**Δ3.** Θεωρούμε συνάρτηση  $g(x) = f(x) - 4e^{-x}$   $x \in [0, +\infty)$ . Επειδή από τη σχέση (2) είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4e^{-x} = 0$  θα είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 4e^{-x}) = +\infty \text{ και έτσι θα υπάρχει } \mu > 0 \text{ ώστε } g(\mu) > 0.$$

- Η  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, \mu]$  ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων  $y = f(x)$  και της  $y = 4e^{-x}$ .

- $\left\{ \begin{array}{l} g(0) = f(0) - 4e^0 = -3 - 4 = -7 < 0 \\ g(\mu) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(0) \cdot g(\mu) < 0$

Από θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον ένα  $x_0 \in (0, \mu)$  ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Άρα η εξίσωση  $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 4e^{-x}$  έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα  $x_0$ .