Αγίου Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – 18532 – Τηλ. 210-4224752 4223687

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΗΜΕΡΙΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου

Α3. α) Σωστό β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x-3)}{(x-1)\cdot(x+1)}=-1$.

Β2. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)\Leftrightarrow -1=3+2a\Leftrightarrow a=-2$

Β3. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχω $f'(x)=\dfrac{(2x-4)\cdot(x^2-1)-(x^2-4x+3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=$

$$=\frac{2x^3-2x-4x^2+4-2x^3+8x^2-6x}{(x^2-1)^2}=\frac{4x^2-8x+4}{(x^2-1)^2}=\frac{4\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{4(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}>0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4. Ισχύει ότι $\alpha^2+9>6\alpha$ για κάθε $\alpha\in\Re-\{3\}$ επομένως

$$\alpha^2+9>6\alpha\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(\alpha^2+9)>f(6\alpha)$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Πρέπει $x\neq 0$ και $\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\geq 0\Leftrightarrow\frac{4+x^2}{2x}\geq 0\Leftrightarrow x>0$, αφού $4+x^2>0$.

Επομένως $A=(0,+\infty)$

Γ2. Έχουμε ότι $f'(x)=3\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}}\cdot\left(\frac{2}{x}+\frac{x}{2}\right)'=3\cdot\frac{-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}}=$

$$=3\cdot\frac{\frac{x^2-4}{2x^2}}{2\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}}=3\cdot\frac{x^2-4}{4x^2\cdot\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}}.$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4=0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x=2$

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Ο.Ε.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=2$ το $f(2)=3\sqrt{2}$.

Γ3. Έχουμε $f_2=\frac{\nu_2}{\nu} \Leftrightarrow 0,2=\frac{4}{\nu} \Leftrightarrow \nu=20$

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i	$f_i\%$	$F_i\%$
1	2	0,1	2	0,1	10	10
2	4	0,2	6	0,3	20	30
3	6	0,3	12	0,6	30	60
4	5	0,25	17	0,85	25	85
5	2	0,1	19	0,95	10	95
6	1	0,05	20	1	5	100
Σύνολο	20	1	-	-	100	-

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \Leftrightarrow x^2 + A\Gamma^2 = 10^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 10^2 - x^2 \Leftrightarrow$$

$$A\Gamma = \sqrt{100 - x^2}.$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $(AB\Gamma) = \dfrac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$

Επομένως $f(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{100 - x^2}}{2}$ με $x \in (0,10)$

Δ2. Για $x \in (0,10)$ έχουμε $f'(x) = \dfrac{\sqrt{100 - x^2} + x \cdot \dfrac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}}}{2} =$

$$= \frac{200 - 4x^2}{4\sqrt{100 - x^2}} = \frac{50 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 50 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 50 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗		↘

O.M.

Επομένως για $x = 5\sqrt{2}$ το τρίγωνο έχει μέγιστο εμβαδόν.

Για $x = 5\sqrt{2}$ έχουμε $A\Gamma = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Άρα $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Αγίου Κωνσταντίνου 11 – Πειραιάς – 18532 – Τηλ. 210-4224752 4223687

Δ3.Έχουμε ότι $f(2)=\sqrt{96}$

$$l=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{96}\cdot\left(f(2+x)-\sqrt{96}\right)}{23x}=\frac{\sqrt{96}}{23}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}=\frac{\sqrt{96}}{23}\cdot f'(2)$$

όπου $f'(2)=\frac{46}{\sqrt{96}}$. Άρα $l=\frac{\sqrt{96}}{23}\cdot\frac{46}{\sqrt{96}}=2$

Δ4. Αφού $\alpha,\beta\in(8,9)$ όπου f γνησίως φθίνουσα

με $\alpha<\beta \overset{f\ \text{γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} f(\alpha)>f(\beta) \overset{f\ \text{γν.φθιν.}}{\Leftrightarrow} f(f(\alpha))<f(f(\beta))\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)\cdot\sqrt{100-f^2(\alpha)}}{2}<\frac{f(\beta)\cdot\sqrt{100-f^2(\beta)}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}<\frac{\sqrt{100-f^2(\beta)}}{\sqrt{100-f^2(\alpha)}}\Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{f(\beta)}<\sqrt{\frac{100-f^2(\beta)}{100-f^2(\alpha)}}.$$

Επιμέλεια: Κατσίμπρας Ευθύμης