ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha \in R-Z$, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει : $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ **(6μ)**

Α2. Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς με σωστό η λάθος και να αιτιολογήσετε την απάντηση σας

i. **«Αν μια συνάρτηση δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο».** **(3μ)**

ii. **Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.** **(3μ)**

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Ποια σημεία του Δ λέγονται κρίσιμα σημεία της f;

(3μ)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό ή Λάθος,

i) Αν η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα [α, β], τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

ii) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

iii) Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

iv) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0.

v) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

(10μ)

Θέμα Β

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+\ln(x-1) & , x>1 \\ 0 & , x=1 \\ \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}g(x) & , x<1 \end{cases}$

όπου g(x) μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν :
$(g'(x))^2 = 2g(x)+3$ με $g(0)=3$ και $g(2)=-1$

Β1. Νδο $g(x)=\frac{1}{2}x^2-3x+3$.
(8μ)

Β2. Νδο $\alpha=-2$ και $\beta=1$ αν η f είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$. **(9μ)**

Β3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f και να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\sqrt{2020}$. **(8μ)**

Θέμα Γ

Για τη συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $\lim_{h\to+\infty}\left(\sqrt{h^2+(f(x)-2x)^2 h}-\sqrt{h^2+x^4h}\right)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(-3)=3$ και $f(2)=8$

Γ1. Να δείξετε ότι : $f(x)=x^2+2x$ **(7μ)**

Γ2. Θεωρούμε την ευθεία (ε): $y=\lambda x$ με $\lambda\in(0,2)$, η οποία τέμνει την C_f στα σημεία (0,0) και Ρ. Αν Σ είναι η προβολή του Ρ πάνω στον άξονα x'x τότε :

i) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΣΡ σαν συνάρτηση του $\lambda\in(0,2)$.
(7μ)

ii) Να βρείτε το σημείο Ρ ώστε το εμβαδόν να γίνεται μέγιστο.
(4μ)

Γ3. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^3$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο με τετμημένη x_0, ξανατέμνει την C_g.
(7μ)

Θέμα Δ

Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και έχει σύνολο τιμών το $[-5,7]$. Αν $f(\alpha)=-3$ και $f(\beta)=-1$:

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta): f'(x_1)=f'(x_2)=0$ **(7μ)**

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(x_0,f(x_0))$ στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f', δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

(5μ)

Δ3. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι x_1, x_2 είναι οι μοναδικές ρίζες της f' στο $[\alpha,\beta]$ και ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2$ είναι η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο σημείο Μ του ερωτήματος Δ2, να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f. **(8μ)**

Δ4. Να βρείτε σε πόσα σημεία η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα xx'. **(5μ)**

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:Ε.ΛΙΑΚΟΥΡΑ –Γ.ΚΑΠΡΑΛΟΣ-Θ.ΜΑΛΑΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1.Σχολικό βιβλίο σελ.:116

Α2 Σχολικό βιβλίο σελ.:**i. Ψευδής**

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της και είναι:

$f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$

ii.**Αληθής.**

Σχολικό βιβλίο σελ.:36-37

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ.:143

Α4. i.Λ ii.Λ iii.Λ iv.Σ v.Λ

Θέμα Β

Β1.Έστω ν ο βαθμός της g(x).

Τότε η $2g(x)+3$ είναι επίσης ν βαθμού

η $g'(x)$ είναι ν-1 βαθμού

και η $(g'(x))^2$ είναι 2(ν-1) βαθμού

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $2\nu - 2 = \nu \Leftrightarrow \nu = 2$

Άρα $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \;, \alpha \neq 0$

και $g(0) = 3 \Rightarrow \gamma = 3$

$g(2) = -1 \Rightarrow 4\alpha + 2\beta + 3 = -1 \Leftrightarrow 4\alpha + 2\beta = -4$

και $g'(x) = 2\alpha x + \beta$

οπότε $\left(g'(x)\right)^2 = 2g(x)+3 \Leftrightarrow \left(2\alpha x+\beta\right)^2 = 2\left(\alpha x^2+\beta x+3\right)+3 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = 2\alpha x^2 + 2\beta x + 9 \Leftrightarrow$

$4\alpha^2 = 2\alpha$ και $4\alpha\beta = 2\beta$ και $\beta^2 = 9$

$\underset{\text{απορ.}}{\alpha=0}$ ή $\alpha=\frac{1}{2}$ και $4\frac{1}{2}\beta = 2\beta$ και $\beta = \pm 3$

$2\beta = 2\beta$

$\beta \in \mathbb{R}$

αν $\beta = 3$ τότε $4\frac{1}{2}+2\cdot 3 = -4 \Leftrightarrow 2+6=-4 \Leftrightarrow 8=-4$ αδύνατο

αν $\beta = -3$ τότε $4\frac{1}{2}+2\cdot(-3) = -4 \Leftrightarrow 2-6=-4 \Leftrightarrow -4=-4$

άρα $\beta = -3$

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 3}$$

B2. Αφού f συνεχής στο $\left(-\infty,1\right]$ θα ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

Για $x<1$: $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x+3\right) \Leftrightarrow$

$$(x-1)f(x) = \left(x^2+\alpha x+\beta\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x^2-3x+3\right)$$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x-1)f(x)\right] = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[\left(x^2+\alpha x+\beta\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x+3\right)\right]$

$$0 = (1+\alpha+\beta)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \alpha+\beta+1=0 \Leftrightarrow \beta=-1-\alpha$$

τότε $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+\alpha x-1-\alpha}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(x+1)+\alpha(x-1)}{x-1} =$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x+1+\alpha\right) = 2+\alpha$

και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = (2+\alpha)\dfrac{1}{2} = \dfrac{2+\alpha}{2}$

και $f(1)=0$ άρα $\dfrac{2+\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha=-2$ και $\beta = 1$

άρα για $x<1$: $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\cdot g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x-1}\cdot g(x) = (x-1)\left(\dfrac{1}{2}x^2-3x+3\right)$

$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x-3$$

B3. $f(x)=\begin{cases} x+\ln(x-1) & ,x>1 \\ \frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x-3 & ,x\le 1\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο (1,+∞) ως πράξεις και σύνθεση συνεχων

Η f είναι συνεχής στο (-∞,1) ως πολυωνυμική

Θα μελετήσουμε την συνέχεια στο 1.

Θέτω $u=x-1,\ \lim\limits_{x\to 1^+}u=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln(x-1)=\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ **και** $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=0=f(1)$

Αρα f ασυνεχής στο 1, όμως συνεχής στο $(-\infty,1]$ **και στο** $(1,+\infty)$

- Για $x>1: f'(x)=1+\frac{1}{x-1}>0\to f\uparrow$ στο $(1,+\infty)$

  $u=x-1\to \lim\limits_{x\to+\infty}u=+\infty$

  $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-1)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ **και** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

  άρα $f\left((1,+\infty)\right)=(-\infty,+\infty)$

  Το $\sqrt{2020}\in f\left((1,+\infty)\right)=(-\infty,+\infty)$ **και** $f\uparrow$ **στο** $(1,+\infty)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(1,+\infty):f(x_1)=\sqrt{2020}$

- Για $x<1: f'(x)=\frac{3}{2}x^2-7x+6$

  $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{3}>1$ άρα για $x<1$ ισχύει $f'(x)>0\to f\uparrow$ στο $(-\infty,1]$

  $f\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2}x^3,0\right]=(-\infty,0]$

  Το $\sqrt{2020}\notin f\left((-\infty,1]\right)$ άρα η $f(x)=\sqrt{2020}$ δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,1]$ και

  $f(\mathbb{R})=f\left((1,+\infty)\right)\cup f\left((-\infty,1]\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Θέμα Γ

Γ1. $\lim\limits_{h\to+\infty}\left(\sqrt{h^2+\left(f(x)-2x\right)^2h}-\sqrt{h^2+x^4h}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{h^2+\left(f(x)-2x\right)^2 h-h^2\text{-}x^4h}{\sqrt{h^2+\left(f(x)-2x\right)^2 h}+\sqrt{h^2+x^4h}}=0\overset{h>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\lim_{h\to+\infty}\frac{h\left(\left(f(x)-2x\right)^2-x^4\right)}{h\left(\sqrt{1+\frac{\left(f(x)-2x\right)^2}{h}}+\sqrt{1+\frac{x^4}{h}}\right)}=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(f(x)-2x\right)^2-x^4}{2}=0\Leftrightarrow\left(f(x)-2x\right)^2=x^4$$

Θέτω $h(x)=f(x)-2x$ και έχω $h^2(x)=x^4$ (1)

$h(x)=0\Leftrightarrow h^2(x)=0\Leftrightarrow x^4=0\Leftrightarrow x=0$

Άρα $h(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}^*$ και h(x) συνεχής στο $\mathbb{R}$.

άρα η h(x) διατηρεί σταθερό πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

Επίσης: $h(-3)=f(-3)+6=9>0\to h(x)>0$ στο $(-\infty,0)$

$h(2)=f(2)-4=4>0\to h(x)>0$ στο $(0,+\infty)$

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow |h(x)|=x^2$ και

$h(x)>0\ ,\forall x\in R^*$ και $h(0)=0$ οπότε $h(x)=x^2, x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)=x^2+2x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

Γ2. i. $f(x)=x^2+2x\ ,x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$

x		-1	
f(x)	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↘		↗

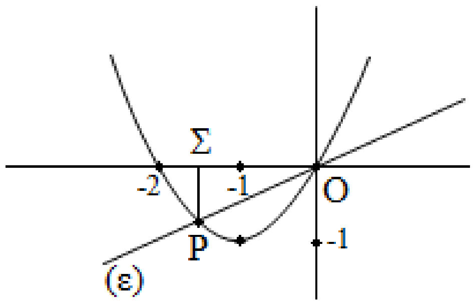
Η f έχει ελάχιστο στο -1 το $f(-1)=-1$. Άρα η κορυφή της παραβολής είναι το $(-1,-1)$

$f(x)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$

$(\varepsilon): y=\lambda x,\ \lambda\in(0,2)$

$P(x_0,y_0)=(x_0,\lambda x_0)$

$$P:\begin{cases}y=\lambda x\\ y=x^2+2x\end{cases}\Leftrightarrow$$



$\lambda x=x^2+2x\Leftrightarrow x^2+x(2-\lambda)=0\Leftrightarrow$

$x(x+2-\lambda)=0\Leftrightarrow$

$x=0$ ή $x=\lambda-2\Leftrightarrow x_0=\lambda-2$

και $y_0=\lambda(\lambda-2)$

άρα $\Sigma(\lambda-2,0)$

$O\Sigma=|\lambda-2|$ και $\Sigma P=|\lambda(\lambda-2)|=\lambda|\lambda-2|$

Άρα $E(\lambda)=\dfrac{O\Sigma\cdot\Sigma P}{2}=\dfrac{\lambda\cdot|\lambda-2|^2}{2}=\dfrac{\lambda(\lambda-2)^2}{2}=\dfrac{\lambda^3-4\lambda^2+4\lambda}{2}$

ii. $E'(\lambda)=\dfrac{3\lambda^2-8\lambda+4}{2}$

$E'(\lambda)=0 \Leftrightarrow 3\lambda^2-8\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=\dfrac{2}{3}$

λ	0 2/3	2
$E'(\lambda)$	+ 0 −	
$E(\lambda)$	↗ ↘	

Το Ε γίνεται μέγιστο για $\lambda=\dfrac{2}{3}$ άρα $P\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{8}{9}\right)$

Γ3.

$g(x)=-x^3+x^2+2x\ ,x\in R$

$g'(x)=-3x^2+2x+2, x\in R$

Η εφαπτομένη της C_g στο $N(x_0,g(x_0))$ είναι : $y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)$

$y-\left(-x_0^3+x_0^2+2x_0\right)=\left(-3x_0^2+2x_0+2\right)\left(x-x_0\right)$

$y=\left(-3x_0^2+2x_0+2\right)x+3x_0^3-2x_0^2-2x_0-x_0^3+x_0^2+2x_0$

$y=\left(-3x_0^2+2x_0+2\right)x+2x_0^3-x_0^2$

Θα δείξω ότι η εξίσωση $g(x)=y$ έχει και άλλη λύση εκτός από το x_0.

$g(x)-y=0 \Leftrightarrow$

$-x^3+x^2+2x-\left(-3x_0^2+2x_0+2\right)x-2x_0^3+x_0^2=0$

$-x^3+x^2+\left(3x_0^2-2x_0\right)x-2x_0^3+x_0^2=0$

-1	1	$3x_0^2-2x_0$	$-2x_0^3+x_0^2$	x_0
	$-x_0$	$-x_0^2+x_0$	$2x_0^3-x_0^2$	
-1	$-x_0+1$	$2x_0^2-x_0$	0	

$$(x-x_0)\left(-x^2+(1-x_0)x+2x_0^2-x_0\right)=0$$

$$x=x_0 \quad ή \quad -x^2+(1-x_0)x+2x_0^2-x_0=0$$

$$\Delta=(1-x_0)^2-4(-1)(2x_0^2-x_0)$$
$$=1-2x_0+x_0^2+8x_0^2-4x_0$$
$$=9x_0^2-6x_0+1=(3x_0-1)^2$$

$$x=\frac{(x_0-1)\pm(3x_0-1)}{-2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x_0-1+3x_0-1}{-2}=\dfrac{4x_0-2}{-2}=\dfrac{-2(-2x_0+1)}{-2}=1-2x_0\\ \dfrac{x_0-1-3x_0+1}{-2}=x_0\end{array}\right.$$

Άρα η εφαπτομένη τέμνει την C_g και στο σημείο $M(1-2x_0,g(1-2x_0))$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. • Η f ως παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ είναι και συνεχής άρα από ΘΜΕΤ θα έχει μια ελάχιστη και μια μέγιστη τιμή. Δηλαδή θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x_1)=\min f=m$ και $f(x_2)=\max f=M$

•Το σύνολο τομών της f στο $[\alpha,\beta]$ είναι το $[-5,7]$ άρα $f(x_1)=m=-5$ και $f(x_2)=M=7$.

Όμως $-5=f(x_1)<-3=f(\alpha)$

και $-1=f(\beta)<7=f(x_2)$

Άρα τα x_1,x_2 ανήκουν στο εσωτερικό του (α,β) είναι θέσεις ακροτάτων της f και η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτά, άρα από το θεώρημα Fermat, θα ισχύει: $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

Δ2. $f'(x_1)=f'(x_2)$ και έστω $x_1<x_2$. Η είναι f συνεχής στο $[x_1,x_2]\subseteq[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(x_0,f'(x_0))$ της $C_{f'}$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι οριζόντια.

Δ3. Η f' έχει μοναδικές ρίζες στο $[\alpha,\beta]$ τις x_1,x_2 και ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, στα διαστήματα (α,x_1), (x_1,x_2) **και** (x_2,β)

- Η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο $M\left(x_0, f'(x_0)\right)$ είναι η $y=2$ άρα $f'(x_0)=2$, οπότε $f'(x)>0$ στο (x_1,x_2)
- Για την f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha,x_1]$ **και** $[x_2,\beta]$ άρα θα υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha,x_1)$ και $\xi_2 \in (x_2,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha}=\dfrac{-5+3}{x_1-\alpha}=\dfrac{-2}{x_1-\alpha}<0$ άρα $f'(x)<0$ στο (α,x_1) $\to f\downarrow$ στο (α,x_1).

και

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(x_2)}{\beta-x_2}=\dfrac{-1-7}{\beta-x_2}=\dfrac{-8}{x_1-\alpha}<0$ άρα $f'(x)<0$ στο $(\alpha,x_1)\to f\downarrow$ στο (x_2,β).

Άρα για την f έχω:

x	α		x_1		x_2		β
f'		−	0	+	0	−	
f		↘		↗		↘	

Δ4.

- $\left.\begin{array}{l} f(x_1)\cdot f(x_2)=-35<0 \\ f \text{ συνεχής στο } [x_1,x_2] \end{array}\right\}$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (x_1,x_2) και $f\uparrow$ στο $[x_1,x_2]$ άρα η ρίζα είναι μοναδική.

- $\left.\begin{array}{l} f(x_2)\cdot f(\beta)=7\cdot(-1)=-7<0 \\ f \text{ συνεχής στο } [x_2,\beta] \end{array}\right\}$ άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (x_2,β) και $f\downarrow$ στο $[x_2,\beta]$ άρα η ρίζα είναι μοναδική.

- $f\left([\alpha,x_1]\right)\overset{f\downarrow}{=}[f(x_1),f(\alpha)]=[-5,-3]$

Το $0\notin f\left([\alpha,x_1]\right)$ άρα η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $[\alpha,x_1]$

Οπότε η $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες, άρα η C_f τέμνει τον άξονα xx' ακριβώς σε 2 σημεία.