ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελ 76

Α2. Σελ 104

Α3. α) Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x)=3x^2$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει $f'(x)\geq 0$

Α4. Λ

Σ

Σ

Σ

Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $D_{fog}=\{x\in D_g \,/\, g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R} \,/\, e^x>1\}=(0,+\infty)\neq\varnothing$ άρα ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων με τύπο : $(fog)(x)=f(g(x))=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}, x>0$

Β2. Για κάθε $x_1, x_2\in(0,+\infty)$ με

$$f(g(x_1))=f(g(x_2))\Rightarrow \frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow$$
$$e^{x_1+x_2}+2e^{x_2}-e^{x_1}-2=e^{x_1+x_2}+2e^{x_1}-e^{x_2}-2\Rightarrow 3e^{x_2}=3e^{x_1}\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα, η fog είναι 1-1

B2. θέτω

$$y=(fog)(x)\Rightarrow y=\frac{e^x+2}{e^x-1}\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow (y-1)e^x=y+2$$

$$\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1},y\neq 1$$

$$E\pi\acute{\iota}\sigma\eta\varsigma,\ \frac{y+2}{y-1}>0\Leftrightarrow y\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)\ \ (1)$$

$$x=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)$$

$$x\in D_f\Leftrightarrow x>0\Leftrightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right)>0\Leftrightarrow\frac{y+2}{y-1}>1\ \Leftrightarrow\ \frac{3}{\text{y-1}}\ >0\Leftrightarrow y>1\quad(2)$$

από (1), (2) προκύπτει ότι $y>1$.

άρα,

$$(fog)^{-1}(y)=\ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right),\ y>1\Rightarrow(fog)^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right),\ x>1$$

B3. $\varphi(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\overset{x>1}{\Longrightarrow}\varphi(x)=\ln(x+2)-\ln(x-1)$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων με

$$\varphi'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-x-2}{(x-1)(x+2)}\Rightarrow\varphi'(x)=\frac{-3}{(x+2)(x-1)}<0\ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ x>1$$

και η φ είναι συνεχής οπότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$.

Β4.

$$\lim_{x\to1^+}\varphi(x)=\lim_{x\to1^+}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)\overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)\right)\overset{u=\frac{x+2}{x-1}}{\underset{u\to1}{=}}\lim_{u\to1}(\ln u)=0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού η f είναι συνεχής στο $(-\infty,\frac{3\pi}{2})$, τότε είναι συνεχής και στο $x_0=0$

'Αρα υπάρχει $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{1}{1-x}-\ln\lambda\right)=\lim\limits_{x\to0^+}(\eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x)=1-\ln\lambda\Leftrightarrow$

$1-\ln\lambda=\lambda\Rightarrow\ln\lambda+\lambda-1=0$

Θεωρώντας την $\kappa(\lambda)=\ln\lambda+\lambda-1$, $\lambda>0$ είναι παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με $\kappa'(\lambda)=\frac{1}{\lambda}+1>0$

και κ συνεχής άρα κ γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Η κ έχει προφανή ρίζα το $\lambda=1$,

άρα και μοναδική, αφού κ γν. αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ2. Ελέγχουμε την παράγωγο στο $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{1-1+x}{x(1-x)}\right)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x(1-x)}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)$$

$=\ 1+0=1$

Άρα $f'(0)=1$ και αφού $f'(0)=\varepsilon\varphi\omega$ τότε $\varepsilon\varphi\omega=1\Rightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$ όπου $\omega=(\widehat{x'x,\varepsilon})$

Γ3. Η f παρ/μη για κάθε x<0 τότε $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$

Η f παρ/μη για κάθε >0 με $f'(x) = συν\, x - ημ\, x$

Λύνοντας $f'(x) = 0 \Leftrightarrow συν\, x = ημ\, x$ με $συν\, x \neq 0$ άρα $\frac{ημ\, x}{συν\, x} = 1 \Rightarrow$

$εφ\, x = 1$ (=) $x = \frac{\pi}{4}$ ή $x = \frac{5\pi}{4}$ για $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$

Άρα τα κρίσιμα σημεία είναι το

A $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ και B $\left(\frac{5\pi}{4}, f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$, δηλαδή τα σημεία

A $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ B $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

γιατί $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = ημ\frac{\pi}{4} + συν\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = ημ\frac{5\pi}{4} + συν\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$

Άρα A $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ και B $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

Γ4. Για x <0 η f παρ/μη ως πράξεις παρ/μων με $f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0$

Άρα $y - f(α) = f'(α)(x-α) \Rightarrow$

$y = f'(α)x + f(α) - αf'(α) \Rightarrow$

$y = \frac{1}{(α-1)^2}x - \frac{1}{(α-1)} - \frac{α}{(α-1)^2} \Rightarrow$

(ε) $y = \frac{1}{(α-1)^2}x + \frac{1-2α}{(α-1)^2}$

Το Β είναι το σημείο τομής με x'x άρα y=0 $\Rightarrow \frac{1}{(\alpha-1)^2}x + \frac{1-2\alpha}{(\alpha-1)^2} = 0 \Rightarrow$

x = 2α – 1 και Β(2α – 1, 0)

Άρα έχουμε x (t) = 2α (t) –1 όμως

Για $t= t_o$ τότε $\alpha(t_0) = -1$ και από υπόθεση $\alpha'(t_0) = -\frac{\alpha(t_0)}{3} = \frac{1}{3}$

Τελικά η x παρ/μη με x'(t) = (2α(t)-1)'

$x'(t) = 2\alpha'(t) \underset{t=t_0}{\Rightarrow} x'(t_0) = 2\alpha'(t_0) = \frac{2}{3}$ μονάδες μήκους / μονάδες χρόνου

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=e^x + x^2 - ex - 1$

- f συνεχής στο [0,1] ως αλγεβρικό άθροισμα συνεχών
- f παρ/μη ως αλγεβρικό άθροισμα παρ/μων με $f'(x) = e^x + 2x - e$ στο (0,1)
- $\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(1)=0 \end{array}\right\}$ f(0) = f(1) Άρα από Θ. Rolle υπάρχει

  τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1)$ ώστε $f'(x_o)=0$

  Επιπλέον η f' παρ/μη ως πράξεις παρ/μων στο (0,1) με $f''(x) = e^x+2 >0$ για κάθε $x\in$ IR

  Άρα η f' γν. αύξουσα για κάθε x∈IR, επομένως $x_o(0,1)$ μοναδική ρίζα της f'.

  Όμως αν $x > x_0>0 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ f γν. αύξουσα στο $[0, x_0]$

  Επιπλέον, αν $x<x_0<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x)<0$

  άρα f γν. φθίνουσα στο $[x_0,1]$

  Τελικά, η f έχει μοναδικό $x_o\in (0,1)$ στο οποίο παρουσιάζει ολ. ελάχιστο.

  Επιπλέον $f(x_o)= e^{x_o} + x_o^2 - ex_o - 1 \underset{e^{x_o}=e-2x_o}{\overset{f'(x_o)=0}{\Longrightarrow}} f(x_o) = e -2x_o + x_o^2 - ex_o-1 = x_o^2 - (e+2)x_o+e-1$

  $\Rightarrow f(x_o) = e - 2x_o+x_o^2 - ex_o-1 = x_o^2- (e+2) x_o+e-1$

Δ2. Εξ ορισμού ολ. ελαχίστου για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $f(x) \geq f(x_o)$ άρα $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{1}{f(x)-f(x_o)} =$

$$\overset{u=f(x)-f(x_o)}{=} \lim_{u\to 0^+} \frac{1}{u} = +\infty$$

Άρα $-1 \leq ημ\left(\frac{1}{x-x_o}\right) \leq 1 \overset{+\frac{1}{f(x)-f(x_o)}}{\Rightarrow} \frac{1}{f(x)-f(x_o)} -1 \leq \frac{1}{f(x)-f(x_o)} + ημ\frac{1}{x-x_o} \leq 1 + \frac{1}{f(x)-f(x_o)}$

με $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_o)} -1\right) = +\infty -1 = +\infty$

με $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_o)} +1\right) = +\infty +1 = +\infty$

Από κριτήριο παρεμβολής το $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{1}{f(x)-f(x_o)} + ημ\left(\frac{1}{x-x_o}\right)\right) = +\infty$

Δ3. Από Δ1 γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ολ. ελάχιστο στο (0,1) και γνωρίζουμε ότι

για κάθε $x\in[x_0,1]$ η f συνεχής για γν. αύξουσα. Άρα $x_o<x<1 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_o) < f(x) < f(1) \Rightarrow$

$f(x_o) < f(x) < 0 \quad (1)$

Θεωρούμε $h(x) = f(x)+x-x_o$ με $x\in[x_0,1]$ συνεχής ως πράξεις συνεχών με

- $h(x_o) = f(x_o) \overset{(1)}{\Rightarrow} h(x_o) <0$
- $h(1) = f(1) +1 - x_o = 1- x_o \overset{x_o\in(0,1)}{\Rightarrow} h(1) >0$

Επομένως $h(1)\, h(x_o) <0$ και από Θ.Bol

Υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα $ρ\in(0,1)$ ώστε $h(ρ) = 0 \Rightarrow f(ρ) + ρ = x_o$

Επιπλέον, η h παρ/μη ως πράξεις παρ/μων στο $(x_o,1)$ με $h'(x) = f'(x) +1>0$

Επομένως, h γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[x_o,1]$

Άρα $ρ\in(x_o,1)$ μοναδική ρίζα της h

Δ4. Γνωρίζουμε από Δ3 ότι $f(\rho) = x_o - \rho$ όμως $x_o < \rho < \kappa < 1$ άρα $x_o - \rho < 0$

Η f συνεχής στο $[x_o, \rho] \subseteq [0,1]$

Η f παρ/μη στο $(x_o, \rho) \subseteq (0,1)$

Από Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in (x_o, \rho)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\rho)-f(x_o)}{\rho - x_o}$ και από Δ1 η f ' γνησίως αύξουσα

Άρα $x_o < \xi < \rho < \kappa \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x_o) < f'(\xi) < f'(\rho) < f'(\kappa) \Rightarrow \dfrac{f(\rho)-f(x_o)}{\rho - x_o} < f'(\kappa) \Rightarrow \dfrac{x_o-\rho - f(x_o)}{\rho - x_o} < f'(\kappa)$

$\Rightarrow -1 - \dfrac{f(x_o)}{\rho - x_o} < f'(\kappa) \Rightarrow$

$f'(\kappa) + 1 > \dfrac{-f(x_o)}{\rho - x_o} \Rightarrow$

$f'(\kappa) + 1 > - \dfrac{f(x_o)}{- f(\rho)} \overset{f(\rho)<0}{\Rightarrow}$

$f(\rho)\,(f'(\kappa) + 1 < f(x_o)$

ΚΡΙΤΙΚΗ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα θέματα έχουν αφετηρία το σχολικό βιβλίο.

Είναι διαβαθμισμένης δυσκολίας. Είναι σαφή και απαιτητικά.

17/6/2020