2021

ΤΡΙΩΡΗ ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΤΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τομέας Μαθηματικών εκπαιδευτηρίων
"Νέα Παιδεία»

νέα παιδεία

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

www.neapaideia.gr

ΘΕΜΑ Α

Α1. **i.** Πότε μια συνάρτηση f: $A \to \mathbb{R}$ έχει αντιστροφή;

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

6 μονάδες

Α2. Να δειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ με $x \in (0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5 μονάδες

Α3. Δίνεται η πρόταση:

« Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν $\dfrac{200}{2{,}5}=80$ χιλιόμετρα την ώρα ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

4 μονάδες

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

1. Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό που κινείται πάνω στην C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά την θετική φορά.

2. Η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, με $f'(x)=\frac{ημx}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_o ισχύει $\frac{S(t)-S(t_o)}{t-t_o}>0$ οπότε είναι $υ(t_o)\geq 0$.

4. Η συνάρτηση f(x) = ημx με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

5. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0}f(x)$ και $\lim_{x\to x_0}g(x)$.

10 μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Β1.α. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=g(0)$ και $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$f(x)<g(x) \text{ στο } (-\infty,0) \text{ και } f(x)>g(x) \text{ στο } (0,+\infty).$$

Β1.β. Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Β2. Έστω πραγματική συνάρτηση $f(x)=|x|x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2.i. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση.

Β2.ii. Αν $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & αν\ \ x<1\\ \sqrt{x-1}, & αν\ \ x\geq 1\end{cases}$ να μελετηθεί η αντίστροφη ως προς τη μονοτονία , κυρτότητα.

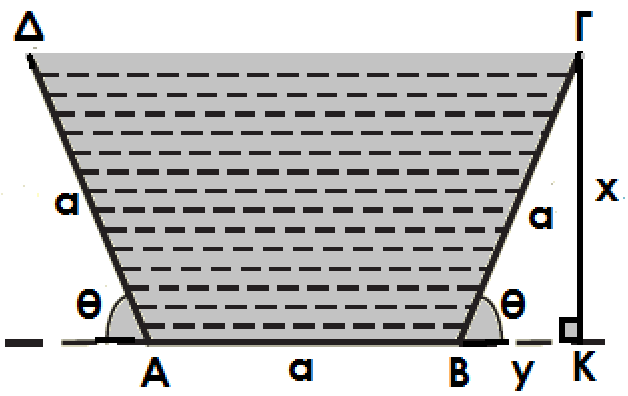
Β2.iii. Για $x>1$, να βρεθεί η εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να αποδείξετε ότι τέμνει τη γραφική παράσταση της f^{-1} και σε άλλο σημείο.

Β2.iv. Να υπολογιστούν τα όρια .

α) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{f^{-1}(x)}$ **β)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f^{-1}(x)}$

ΘΕΜΑ Γ

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή ΑΒΓΔ φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου το α είναι σε μέτρα και η γωνία $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ σε rad. Γνωρίζουμε ότι το όριο $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{2-y}{\theta^2}$ είναι πραγματικός αριθμός



Γ1. Να αποδείξετε ότι α=2m.

Γ2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x}{y}$ **β.** $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{x+y-2}{\theta}$ **γ.** $\lim\limits_{\theta\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

Γ3. Δείξτε ότι υπάρχει τιμή της γωνίας $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $\theta^2=x+y-1$

.

Γ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής *ΑΒΓΔ* είναι ίσο με:

$$E = 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Γ5. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

Γ6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4\eta\mu\theta - 3\sqrt{3} = \kappa^2 - 4\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα, για μοναδική τιμή του κ.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{t \to +\infty}\left(\sqrt{e^{2t} + (x+1)e^{x+t} + 1} - e^t\right) = \frac{f'(x)}{2(x+1)},\ x \neq -1 \quad \text{και} \quad f(-1) = \frac{2}{e}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = (x^2+1)e^x,\ \ x \in \mathbb{R}$.

7 Μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0, +\infty)$.

5 Μονάδες

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x) = f'(x)$ ως προς την μονοτονία της και τα ακρότατα της.

5 Μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(x)(x+1) \leq f(x^2) + 2ex$ για κάθε $x \geq 1$.

8 Μονάδες