2021

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΡΙΩΡΗΣ ΓΡΑΠΤΗΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΤΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τομέας Μαθηματικών εκπαιδευτηρίων
“Νέα Παιδεία»

ΘΕΜΑ Α

Α1. **i.** Πότε μια συνάρτηση f: Α→ $\mathbb{R}$ έχει αντιστροφή;

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f;

6 μονάδες

Απάντηση

i. Έστω μια συνάρτηση f: Α→$\mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, f(A), της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της Α για το οποίο ισχύει f(x) = y. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση:

$$g : f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε y∈f(A) αντιστοιχίζεται στο μοναδικό x∈A για το οποίο ισχύει f(x) = y.

ii. Από τον τρόπο που ορίστηκε η g προκύπτει ότι:

- έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών f(A) της f,
- έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού Α της f και
- ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το x στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο x και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η g λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με $\mathbf{f^{-1}}$. Επομένως έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Α2. Να δειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \in (0,+\infty)$ είναι $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5 μονάδες

Απάντηση

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} =$$

$$= \frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α3. Δίνεται η πρόταση:

« Ένα αυτοκίνητο διήνυσε μία διαδρομή 200 χιλιομέτρων σε 2,5 ώρες. Κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της διαδρομής, η ταχύτητα του αυτοκινήτου ήταν $\dfrac{200}{2{,}5}=80$ χιλιόμετρα την ώρα ».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

4 μονάδες

Απάντηση

α. Είναι αληθής (Α).

β. Αν θεωρήσουμε $x = S(t)$, $t\in[0\ ,\ 2{,}5]$ η συνάρτηση που δίνει την θέση του αυτοκινήτου. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει t_o τέτοιο ώστε $\upsilon(t_o)=S'(t_o)=80$.

Η συνάρτηση S είναι συνεχής στο $[0\ ,\ 2{,}5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0\ ,\ 2{,}5)$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει χρονική στιγμή $t_o\in(0\ ,\ 2{,}5)$ τέτοιο, ώστε $\upsilon(t_o)=\dfrac{S(2{,}5)-S(0)}{2{,}5}=\dfrac{200}{2{,}5}=80$ χιλιόμετρα την ώρα.

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

1. Μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, όταν ένα κινητό που κινείται πάνω στην C_f, για να διαγράψει το τόξο που αντιστοιχεί στο διάστημα Δ πρέπει να στραφεί κατά την θετική φορά.

2. Η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, με $f'(x)=\frac{ημx}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

3. Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_o ισχύει $\frac{S(t)-S(t_o)}{t-t_o}>0$ οπότε είναι $υ(t_o)\geq 0$.

4. Η συνάρτηση f(x) = ημx με $x\in\mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

5. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

10 μονάδες

Απαντήσεις

1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Λ 5. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.α. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0)=g(0)$ και $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$f(x)<g(x)$ στο $(-\infty,0)$ και $f(x)>g(x)$ στο $(0,+\infty)$.

Β1.β. Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Απαντήσεις

Β1α. Θεωρώ την συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τότε $h(0)=0$ και $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$. Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει:

$$x<0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(0) \Leftrightarrow f(x)<g(x)$$

$$x>0 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(0) \Leftrightarrow f(x)>g(x)$$

Β1β. Έστω $f(x)=e^x$ και $g(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$.

Ισχύουν: $f(0)=g(0)=1$ και $f'(x)=e^x$, $g'(x)=1+x+\frac{x^2}{2}$

$$f'(0)=g'(0)=1 \text{ και } f''(x)=e^x \text{ , } g''(x)=1+x$$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει η ανίσωση: $e^x>1+x \Leftrightarrow f''(x)>g''(x)$ για κάθε $x>0$ άρα από (α) ερώτημα έχουμε:

$$f'(0)=g'(0)=1 \text{ και } f''(x)>g''(x)$$

επομένως $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x>0$.

Ομοίως $f(0)=g(0)=1$ και $f'(x)>g'(x)$

επομένως $f(x)>g(x)$ για κάθε $x>0$.

Β2. Έστω πραγματική συνάρτηση $f(x)=|x|x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Β2.i. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη συνάρτηση.

Β2.ii. Αν $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & \text{αν } x<1\\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x\geq 1\end{cases}$ να μελετηθεί η αντίστροφη ως προς τη μονοτονία , κυρτότητα.

Β2.iii. Για $x>1$, να βρεθεί η εφαπτομένη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και να αποδείξετε ότι τέμνει τη γραφική παράσταση της f^{-1} και σε άλλο σημείο.

Β2.iv. Να υπολογιστούν τα όρια .

α) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{f^{-1}(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{f^{-1}(x)}$

Απαντήσεις

B2i. $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{αν } x<0\\ x^2+1, & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$, η f συνεχής στους πραγματικούς.

Είναι $f'(x)=\begin{cases}-2x, & \text{αν } x<0\\ 2x, & \text{αν } x\ge 0\end{cases}$ δηλαδή $f'(x)>0,\ x\in\mathbb{R}^*$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς , άρα και «1-1» , οπότε αντιστρέφεται.

Για $x<0,\ y=-x^2+1\Leftrightarrow x^2=1-y\Leftrightarrow x=-\sqrt{1-y}$.

Για $x\ge 0,\ y=x^2+1\Leftrightarrow x^2=y-1\Leftrightarrow x=\sqrt{y-1}$

Συνεπώς $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & \text{αν } x<1\\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$.

B2ii. Αν $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt{1-x}, & \text{αν } x<1\\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x\ge 1\end{cases}$ τότε f^{-1} συνεχής στους πραγματικούς

Αν $x<1$, $\left(f^{-1}(x)\right)'=\left(-\sqrt{1-x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}>0$.

Αν $x>1$, $\left(f^{-1}(x)\right)'=\left(\sqrt{x-1}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-x}}>0$, οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα στους πραγματικούς.

Ελέγχω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}=+\infty .$$

Οπότε η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Τελικά $\left(f^{-1}(x)\right)'=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}, & \text{αν } x<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}, & \text{αν } x>1\end{cases}$.

Αν x < 1, $\left(f^{-1}(x)\right)'' = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\right)' = \dfrac{1}{4\sqrt{(1-x)^3}} > 0$, οπότε η f^{-1} είναι κυρτή στο $(-\infty,1)$.

Αν x >1, $\left(f^{-1}(x)\right)'' = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)' = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x-1)^3}} < 0$, οπότε η f^{-1} είναι κοίλη στο $(1,+\infty)$.

B2iii. Η εφαπτομένη στο $M(x_o, f(x_o))$, $x_o > 1$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y - \sqrt{x_o - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_o-1}}(x - x_o)$. Η (ε) περνά από την αρχή των αξόνων άρα $0 - \sqrt{x_o - 1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_o - 1}}(0 - x_o) \Leftrightarrow x_o = 2$.

Αρά για $x_o = 2$ έχουμε $(\varepsilon):\ y = \dfrac{1}{2}x$.

Θα δείξω ότι η (ε) επανατέμνει την $C_{f^{-1}}$.

Για x > 1 $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow x = 2$ απορρίπτεται.

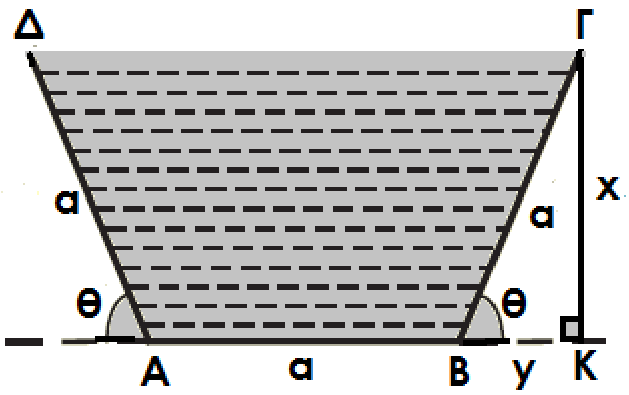
Για $x \le 1$ $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}x \Leftrightarrow -\sqrt{1-x} = \dfrac{1}{2}x \overset{x<0}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 + 2\sqrt{2} > 0$ απορρίπτεται ή $x_2 = -2 - 2\sqrt{2}$ δεκτή.

B2iv. **α)** $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{f^{-1}(x)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{f^{-1}(x)} \overset{f^{-1}(x)=y}{=} \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(y)-f(0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y|y|+1-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0} |y| = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανάλι του οποίου η κάθετη διατομή *ΑΒΓΔ* φαίνεται στο διπλανό σχήμα και είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου το α είναι σε μέτρα και η γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ σε rad. Γνωρίζουμε ότι το όριο $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{2-y}{\theta^2}$ είναι πραγματικός αριθμός



Γ1. Να αποδείξετε ότι α=2m.

Γ2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{x}{y}$ **β.** $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{x+y-2}{\theta}$ **γ.** $\lim\limits_{\theta \to 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}\right)$

Γ3. Δείξτε ότι υπάρχει τιμή της γωνίας $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοια ώστε $\theta^2 = x + y - 1$

.

Γ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της διατομής *ΑΒΓΔ* είναι ίσο με:

$$E = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$$

Γ5. Για ποια τιμή του θ το εμβαδόν της κάθετης διατομής μεγιστοποιείται;

Γ6. Να δείξετε ότι η εξίσωση $4\eta\mu\theta - 3\sqrt{3} = \kappa^2 - 4\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$ με $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα, για μοναδική τιμή του κ.

Απαντήσεις

Γ1. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΚΓ ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \frac{x}{\alpha} \Leftrightarrow x = \alpha\cdot\eta\mu\theta \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{y}{\alpha} \Leftrightarrow y = \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

Είναι $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{2-y}{\theta^2} = \ell \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $h(\theta) = \frac{2-y}{\theta^2} = \frac{2-\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta^2}$ με $\lim\limits_{\theta\to 0}h(\theta) = \ell$.

Τότε:

$$2-\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta = \theta^2\cdot h(\theta) \Rightarrow \lim_{\theta\to 0}(2-\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta) = \lim_{\theta\to 0}\left(\theta^2\cdot h(\theta)\right) \Rightarrow$$

$$2-\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2$$

Γ2.

α. $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\frac{x}{y} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\alpha\cdot\eta\mu\theta}{\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\alpha\cdot\eta\mu\theta}{\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta} = \lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}\cdot\eta\mu\theta\right) = +\infty$.

β. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{2\cdot\eta\mu\theta+2\cdot\sigma\upsilon\nu\theta-2}{\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0}\left(2\cdot\frac{\eta\mu\theta}{\theta}+2\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\theta}\right) = 2+0 = 2$.

γ.

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\eta\mu\frac{1}{x}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\eta\mu(2\eta\mu\theta)\cdot\eta\mu\frac{1}{2\eta\mu\theta}\right) \overset{\substack{\kappa=2\eta\mu\theta \\ \kappa\to 0}}{=}$$

$$= \lim_{\kappa\to 0}\left(\eta\mu\kappa\cdot\eta\mu\frac{1}{\kappa}\right) \overset{\kappa\rho.\pi\alpha\rho.}{=} 0$$

Γ3. $\theta^2 = x+y-1 \Leftrightarrow \theta^2 - 2\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta + 1 = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\theta) = \theta^2 - 2\eta\mu\theta - 2\sigma\upsilon\nu\theta + 1$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ συνεχής ως πράξεις συνεχών με $f(0) = -1 < 0$ και $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - 1 > 0$ άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι υπάρχει $\theta_o \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f(\theta_o) = 0 \Leftrightarrow \theta_o^2 - 2\eta\mu\theta_o - 2\sigma\upsilon\nu\theta_o + 1 = 0$.

Γ4.

$$E = \frac{\Gamma\Delta + AB}{2}\cdot\Gamma K = \frac{AB + 2BK + AB}{2}\cdot\Gamma K = (AB+BK)\cdot\Gamma K =$$

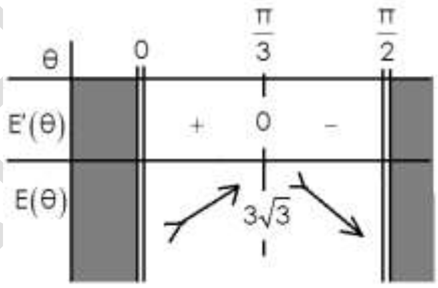
$$= (2\alpha+2y)\cdot x = \cdot\eta\mu\theta \Leftrightarrow E(\theta) = 4\eta\mu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$$

Γ5. Η Ε παραγωγίσιμη με:

$$E'(\theta)=4\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta-4\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow$$
$$E'(\theta)=4\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta-4\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta\right) \Leftrightarrow$$
$$E'(\theta)=4\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right),\quad \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$E'(\theta)=0 \Leftrightarrow 4\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=-1 \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2} \underset{\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\overset{\sigma\upsilon\nu\theta>0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$
$$E'(\theta)>0 \Leftrightarrow 4\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)>0 \Leftrightarrow$$
$$2\left(\sigma\upsilon\nu\theta+1\right)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta<\frac{\pi}{3}$$



Άρα η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο   και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\frac{\pi}{3}$ το $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$.

Γ6. Η δεδομένη σχέση γίνεται:

$$4\eta\mu\theta-3\sqrt{3}=\kappa^2-4\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow$$
$$4\eta\mu\theta+4\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta=\kappa^2+3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$
$$4\eta\mu\theta\cdot\left(1+\sigma\upsilon\nu\theta\right) \Leftrightarrow$$
$$E(\theta)=\kappa^2+3\sqrt{3}\quad (1)$$

Η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$ άρα έχει σύνολο τιμών το

$$E(\Delta_1)=\left(\lim_{\theta\to 0^+}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,3\sqrt{3}\right].$$

Η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$ άρα έχει σύνολο τιμών το

$$E(\Delta_2)=\left(\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-}E(\theta),E\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(4,3\sqrt{3}\right]$$

Άρα το σύνολο τιμών της Ε είναι το $R_E=\left(0,3\sqrt{3}\right]$.

Παρατηρούμε ότι το $\kappa^2+3\sqrt{3}\geq 3\sqrt{3}$, με το «=» να ισχύει για κ=0. Συνεπώς αν $\kappa\neq 0$ το $\kappa^2+3\sqrt{3}\notin R_E$ και η (1) δεν έχει λύση.

Αν κ=0 τότε $E(\theta)=3\sqrt{3}$ το οποίο ισχύει μόνο στην τιμή $\theta=\frac{\pi}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^t\right)=\frac{f'(x)}{2(x+1)},\ x\neq-1 \quad \text{και} \quad f(-1)=\frac{2}{e}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι : $f(x)=(x^2+1)e^x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

7 Μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να δείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(0,+\infty)$.

5 Μονάδες

Δ3. Να μελετήσετε την συνάρτηση $g(x)=f'(x)$ ως προς την μονοτονία της και τα ακρότατα της.

5 Μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f(x)(x+1)\leq f(x^2)+2ex$ για κάθε $x\geq 1$.

8 Μονάδες

Απαντήσεις

Δ1. Είναι:

$$I=\ell im_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}-e^t\right)=\ell im_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}\right)^2-\left(e^t\right)^2}{\sqrt{e^{2t}+(x+1)e^{x+t}+1}+e^t}=$$

$$\ell im_{x\to+\infty}\frac{\cancel{e^t}\left((x+1)e^x+\frac{1}{e^t}\right)}{\cancel{e^t}\left(\sqrt{1+\frac{(x+1)e^{x+t}}{e^{2t}}+\frac{1}{e^{2t}}}+1\right)}=\ell im_{x\to+\infty}\frac{\left((x+1)e^x+\frac{1}{e^t}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{(x+1)e^xe^t}{e^{2t}}+\frac{1}{e^{2t}}}+1\right)}=\frac{(x+1)e^x}{2}$$

Άρα, για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ έχουμε:

$$\frac{f'(x)}{2(x+1)}=\frac{(x+1)e^x}{2}\Rightarrow f'(x)=\left(x^2+2x+1\right)e^x\Rightarrow f'(x)=\left(x^2+1\right)e^x+2xe^x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(x^2+1\right)\left(e^x\right)'+\left(x^2+1\right)'e^x\Rightarrow f'(x)=\left(\left(x^2+1\right)e^x\right)'$$

Επομένως,

$$f(x)=\begin{cases}\left(x^2+1\right)e^x+c_1,\ x<-1\\ \dfrac{2}{e}\qquad\quad ,\ x=-1\\ \left(x^2+1\right)e^x+c_1,\ x>-1\end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0=-1$ οπότε: $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=f(-1)$

Όμως,

- $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\left(x^2+1\right)e^x+c_1\right)=\frac{2}{e}+c_1$
- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\left(x^2+1\right)e^x+c_2\right)=\frac{2}{e}+c_2$
- $f(-1)=\frac{2}{e}$

Άρα, $\frac{2}{e}+c_1=\frac{2}{e}+c_2=\frac{2}{e}\Rightarrow c_1=c_2=0$.

Τελικά $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x, x\in\mathbb{R}$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με:

$$f'(x)=\left(\left(x^2+1\right)e^x\right)'=2xe^x+\left(x^2+1\right)e^x=(x+1)^2e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Οπότε, $f'(x)>0$, για κάθε $x\neq-1$ και f: συνεχής στο $x_0=-1$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(x^2+1\right)e^x\right)=+\infty$$

Εύρεση του ορίου $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

<u>Α τρόπος (χωρίς χρήση κανόνα De L' Hospital)</u>

Θα δείξουμε ότι $0<\left(x^2+1\right)e^x<\frac{x^2+1}{x^4}e^4$ (1) για x < -1 (αφού μας ενδιαφέρει η ποσότητα κοντά στο -∞)

Προφανώς $0<\left(x^2+1\right)e^x$

Άρα θα δείξω ότι

$$\left(x^2+1\right)e^x<\frac{x^2+1}{x^4}e^4 \Leftrightarrow e^x<\left(\frac{e}{x}\right)^4 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{4}}<\left|\frac{e}{x}\right| \overset{x<0}{\Leftrightarrow} e^{\frac{x}{4}}<-\frac{e}{x} \overset{u=-\frac{x}{4}}{\Leftrightarrow} e^{-u}<\frac{e}{4u} \Leftrightarrow \overset{u>0}{\Leftrightarrow} 4u<e^{u+1}$$

Θεωρούμε την συνάρτηση με x∈(0,+∞) η οποία είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=e^{x+1}-4>0$ για x > 1.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο (1,+∞) οπότε $u>1 \Leftrightarrow h(u)>h(1)=e^2-4>0 \Leftrightarrow 4u<e^{u+1}$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^4}e^4\right)=0 \text{ αφού } \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^4}=0 \text{ και } \lim_{x\to-\infty}0=0$$

Από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)e^x=0$

<u>Β τρόπος (με χρήση κανόνα De L' Hospital)</u>

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\left(x^2+1\right)e^x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

Αφού, η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών της θα είναι:

$$f(\mathbb{R})=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Δ3. Η συνάρτηση $g(x)=f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left((x+1)^2e^x\right)'=\ldots=(x+1)(x+3)e^x,\ x\in\mathbb{R}.$$

Επιλύοντας την ανίσωση $f''(x)>0$ προκύπτει ότι

$f''(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

Οπότε, η g θα είναι:

- Θετική για $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$

- Αρνητική για $x \in (-3,-1)$

Έχει τοπικό μέγιστο στο -3 το $g(-3) = 4e^{-3}$ και ελάχιστο στο -1 το $g(-1) = 0$.

Δ4. Για $x > 1 \overset{\cdot x}{\Rightarrow} x^2 > x > 1$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,x]$ άρα και συνεχής στο $[1,x]$ οπότε από ΘΜΤ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (1,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{f(x)-2e}{x-1}$.

Επίσης, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[x,x^2]$ άρα και συνεχής στο $[x,x^2]$ οπότε από ΘΜΤ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x,x^2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}$.

Στο διάστημα $[1,+\infty) \subseteq [-1,+\infty)$ η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

$$\xi_1 < \xi_2 \overset{f':\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(x)-2e}{x-1} < \frac{f(x^2)-f(x)}{x(x-1)} \overset{x>1}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow f(x)-2e < \frac{f(x^2)-f(x)}{x} \Rightarrow xf(x)-2ex < f(x^2)-f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)f(x) < f(x^2)+2ex$$

Επίσης, για x = 1 η ζητούμενη σχέση ισχύει ως ισότητα. Οπότε,

$$(x+1)f(x) \le f(x^2)+2ex \text{ για κάθε } x \in [1,+\infty)$$