

ΑΡΧΗ 1^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

- Αν η f είναι συνεχής στο Δ
- και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

Μονάδες 8

A2. Έστω μία συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

- α. Πότε η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα $x_0 \in A$; (Μονάδες 2)
- β. Να ορίσετε την πρώτη παράγωγο f' της f . (Μονάδες 3)

Μονάδες 5

A3. Δίνονται οι παρακάτω ισχυρισμοί:

1. «Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = l$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -l$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό με ένα Σ αν είναι σωστός ή με ένα Λ αν είναι λανθασμένος. (Μονάδα 1)

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

2. «Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε ένα σημείο της x_0 , τότε υποχρεωτικά θα παρουσιάζει και ολικό μέγιστο».

Α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό με ένα Σ αν είναι σωστός ή με ένα Λ αν είναι λανθασμένος. (Μονάδα 1)

β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

A4. Να συμπληρωθεί ο ισχυρισμός ώστε να είναι σωστός, σημειώνοντας στο τετράδιό σας το κατάλληλο γράμμα.

«Αν η γραφική παράσταση C_f μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $[\alpha, \beta]$ τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο, τότε: _____»

α. $f(\alpha)f(\beta) > 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

β. $f(\alpha)f(\beta) < 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

γ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον $x'x$.

δ. μεταξύ των σημείων τομής της με τον $x'x$ θα διατηρείται το πρόσημο της f .

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = \frac{x-1}{x+1}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 6

$$\text{Αν } h(x) = f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), x \in (-1, 1),$$

B3. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 9

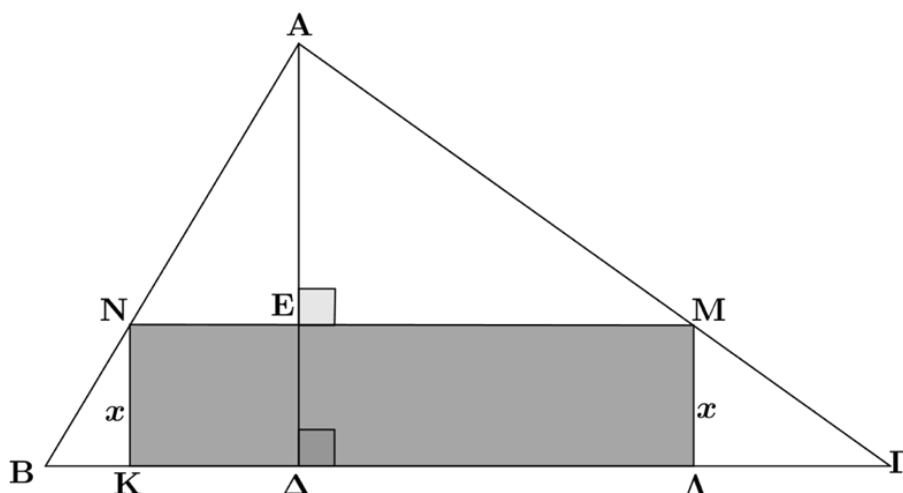
B4. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της h και να γίνει η γραφική παράσταση.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Γ

Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης ΒΓ = 10 cm και ύψους ΑΔ = 5 cm όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Γ1. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ είναι

$$E = E(x) = -2x^2 + 10x, \quad x \in (0, 5).$$

Μονάδες 7

Γ2. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου ΚΛΜΝ γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}^-} \frac{\ln(5-2x)}{2E(x)-25}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 5)$ τέτοιο, ώστε $E(x_0) = \sqrt[2020]{e^{x_0}} + \frac{23}{2}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = a^x, a > 0$ και $g(x) = -x^2 + 2x + 1$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x) \geq \ln 2 \cdot x + 1$.

Δ1. Να υπολογίσετε την τιμή του a .

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 4^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Δ2. Αν $\alpha = 2$, και $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, να δείξετε ότι η φ είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Δ3. Να δείξετε ότι η C_φ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακριβώς σημεία, και να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Μονάδες 6

Δ4. Να λυθεί η εξίσωση $\varphi(\eta\mu x + 2) = \ln 4 \cdot \eta\mu x + \ln 4$.

Μονάδες 5

Δ5. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του θετικού λ , ώστε να ισχύει

$$\varphi'(e^x) - \varphi'(\lambda x) \geq 0$$

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 5^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΕΛΟΣ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ