ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0)=0$ **Μονάδες 10**

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία y=λx+β λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$; **Μονάδες 5**

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β. Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ ισχύει: $(εφx)' = -\dfrac{1}{συν^2 x}$

δ. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ημx}{x} = 1$

ε. Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w με $z \neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις: $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2$ και $w = z-3i+\dfrac{1}{z-3i}$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z **Μονάδες 7**

Β2. Να αποδείξετε ότι $\overline{z}+3i = \dfrac{1}{z-3i}$ **Μονάδες 4**

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2 \le w \le 2$ **Μονάδες 8**

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$ **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$..

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right), x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 8**

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 3**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής. **Μονάδες 7**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=συνx$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, οι οποίες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

i. f(x)>0 και g(x)>0

ii. $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \dfrac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

iii. $\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \dfrac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ότι f(x) = g(x) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. **Μονάδες 9**

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x, \quad x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 4**

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ **Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $F(x)=\displaystyle\int_1^x f\left(t^2\right)dt$ τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x = 1. **Μονάδες 7**

Σχόλιο:

Μετά τα θέματα των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας, τα θέματα των Μαθηματικών Κατεύθυνσης είχαν αναμενόμενο βαθμό δυσκολίας. Απευθυνόταν σε πολύ καλά προετοιμασμένους και ψύχραιμους υποψηφίους.

Ευχόμαστε σε όλα τα παιδιά καλή συνέχεια στις εξετάσεις τους.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 260.

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

Α3. **α.** → Σωστό **β.** → Σωστό **γ.** → Λάθος **δ.** → Λάθος **ε.** → Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z}-\overline{3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|\overline{z-3i}|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1.$ Οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=1.

Β2. $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)(\overline{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Β3. $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)\in\mathbb{R}.$

$|w|=\left|z-3i+\dfrac{1}{z-3i}\right|\le|z-3i|+\left|\dfrac{1}{z-3i}\right|=2,$ άρα $|w|\le 2$ και επειδή $w\in\mathbb{R}$ ισχύει $-2\le w\le 2.$

Β4. Έστω $z=\alpha+\beta i,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},$ τότε $|z-w|=|z-2\operatorname{Re}(z)|=|-\alpha+\beta i|=|z|.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow e^xf'(x)+e^xf''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow \left(e^xf'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'.$

Άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $e^xf'(x)-e^x=xf'(x)+c$. Για x=0 έχουμε $e^0f'(0)-e^0=0\cdot f'(0)+c \Leftrightarrow c=-1.$

Άρα $e^xf'(x)-e^x=xf'(x)-1 \Leftrightarrow f'(x)\left(e^x-x\right)=e^x-1.$

Έστω $g(x)=e^x-x.$ Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x-1.$ $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\ g'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	ελάχιστο	↗

Άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ δηλαδή ισχύει $g(x)\ge g(0)=1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$
Συνεπώς $e^x-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

Άρα $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}=\left(\ln\left(e^x-x\right)\right)'$ οπότε υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)+c_1$

Για x = 0 έχουμε $f(0)=\ln1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0.$
Άρα $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}.$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}.$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0,\ f'(x)>0 \overset{e^x-x>0}{\Leftrightarrow} e^x-1>0 \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	ελάχιστο	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$ με ελάχιστη τιμή $f(0)=0$.

Γ3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=\dfrac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}.$

Έστω $h(x)=2e^x-xe^x-1.$ Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=2e^x-e^x-xe^x=e^x(1-x).$
$h'(x)=0 \Leftrightarrow x=1,\ h'(x)>0 \Leftrightarrow x<1.$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	μέγιστο	$\searrow$	

$h(1)=2e-e-1=e-1>0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=-1$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x}{e^{-x}}\underset{\text{De L'H.}}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^x-xe^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2-x)e^x-1\right]=-\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}(2-x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

$0\in h\left((-\infty,1]\right)\overset{h\nearrow}{=}(-1,e-1]$ άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in(-\infty,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_1)=0$.

$0\in h\left([1,+\infty)]\right)\overset{h\searrow}{=}(-\infty,e-1]$ άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $h(x_2)=0$.

Για $x\in(-\infty,1]$ έχουμε : $x<x_1\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(x_1)\Leftrightarrow h(x)<0,\ \ x>x_1\overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow}h(x)>h(x_1)\Leftrightarrow h(x)>0$

Για $x\in[1,+\infty)$ έχουμε : $x<x_2\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(x)>h(x_2)\Leftrightarrow h(x)>0,\ \ x>x_2\overset{h\searrow}{\Leftrightarrow}h(x)<h(x_2)\Leftrightarrow h(x)<0$

Το πρόσημο της h φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		x_1		1		x_2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

Συνεπώς αφού $f''(x)=\dfrac{h(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$ και $\left(e^x-x\right)^2>0$ ισχύει:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$	σ.κ.	$\smile$	σ.κ.	$\frown$	

Άρα η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Γ4. Έστω $\Phi(x)=\ln\left(e^x-x\right)-\text{συν}x,\ x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ η οποία είναι συνεχής.

$\Phi(0)=-1<0$

Όμως $g(x)=e^x-x>1$ όταν $x\neq0$ τότε $\ln\left(e^x-x\right)>\ln1\Leftrightarrow\ln\left(e^x-x\right)>0,\ x\neq0$ άρα $\Phi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}}-\dfrac{\pi}{2}\right)>0$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0)=0$. Ακόμη Φ παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $\Phi'(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}+\text{ημ}x>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $x+t=u$ με $dt=du$ και $t=u-x$ όταν $t=0$ το $u=x$ και όταν $t=-x$ το $u=0$.

Άρα $\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt=\int_x^0\frac{e^{2u-2x}}{g(u)}du=e^{-2x}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0\frac{e^{2u}}{f(u)}du$ ομοίως $\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0\frac{e^{2u}}{f(u)}du$.

Τότε $\displaystyle\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\frac{1}{e^{2x}}\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du$ ή $\displaystyle 1-f(x)=\int_x^0\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow-f(x)=-1-\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du\Leftrightarrow f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{g(u)}du$.

Αντίστοιχα $g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du$. Η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών άρα η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}du$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Η συνάρτηση $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών άρα και η $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ επομένως και η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Έχουμε $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)\,g(x)=e^{2x}$ και $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g'(x)\cdot f(x)=e^{2x}$.

Άρα $f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow (\ln f(x))'=(\ln g(x))' \Leftrightarrow \ln f(x)=\ln g(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$ όμως $f(0)=g(0)=1$

άρα c = 0, τότε $\ln f(x)=\ln g(x) \overset{\ell nx}{\underset{1-1}{\Leftrightarrow}} f(x)=g(x)$

Δ2. Από **Δ1** έχουμε $f'(x)g(x)=e^{2x} \overset{f=g}{\Leftrightarrow} f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)' \Leftrightarrow f^2(x)=e^{2x}+c_1$

Αν x = 0 τότε $f^2(0)=1+c_1$ ή $c_1=0$. Άρα $f^2(x)=e^{2x} \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=e^x$

Δ3. $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$

Έστω $\frac{1}{x}=u$ όταν $x\to 0^-$ το $u\to -\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{u\to -\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim\limits_{u\to -\infty}\frac{e^{-u}}{u}\underset{\text{De L'H.}}{\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{u\to -\infty}\left(-e^{-u}\right)=-\infty$

Δ4. $F(x)=\int_1^x f\left(t^2\right)dt=\int_1^x e^{t^2}dt$

Η e^{t^2} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η F παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $F'(x)=e^{x^2}>0$. Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in[0,1]$ η F είναι συνεχής. Για κάθε $x\le 1$ η F είναι γνησίως αύξουσα άρα $F(x)\le F(1) \Leftrightarrow F(x)\le 0$.
Τότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1 |F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 (x)'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'dx=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\text{τμ}$$

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΤΣΙΛΙΦΩΝΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ