ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];

Μονάδες 4

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα

β) Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x

γ) Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0.

δ) $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2 + |z+1|^2 = 4 \quad (1)$$
$$|w - 5\overline{w}| = 12 \quad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ = 1

Μονάδες 6

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1 + z_2|$.

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Μονάδες 6

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1 \le |z - w| \le 4$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1,\ x>0$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, x>0 έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες. **Μονάδες 6**

Γ3. Αν $x_1,\ x_2$ με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) + f(x_0) = 2012$$

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)=f(x)+1 με x>0, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία x = e

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, η οποία για κάθε x>0 ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \dfrac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \dfrac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 10

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x), \quad x > 0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2 \,\eta\mu\dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Μονάδες 5

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt, \quad x>0,$$

όπου α>0, είναι κυρτή (μονάδες 2). Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

F(x) + F(3x) > 2F(2x), για κάθε x>0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$$

Μονάδες 4

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελ. 253.
Α2. Σχολικό βιβλίο, σελ. 191.
Α3. Σχολικό βιβλίο, σελ. 258.
Α4. **α.** → Σωστό **β.** → Σωστό **γ.** → Λάθος **δ.** → Λάθος **ε.** → Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow z\bar z - z - \bar z + 1 + z\bar z + z + \bar z + 1 = 4 \Leftrightarrow 2z\bar z = 2 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1$. Άρα οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ρ=1.

Β2. Έχουμε $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2 \Leftrightarrow |z_1|^2 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 = 2 \Leftrightarrow$

$1 - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + 1 = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = 0 \quad (3)$.

$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + |z_2|^2 \overset{(3)}{=} |z_1|^2+|z_2|^2 = 1+1 = 2$.

Επομένως $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$.

Β3. Έχουμε $|w-5\overline{w}|=12 \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi-5x+5yi|=12 \Leftrightarrow \sqrt{(-4x)^2+(6y)^2}=12 \Leftrightarrow 16x^2+36y^2=144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η παραπάνω έλλειψη.

Η μέγιστη τιμή του $|w|$ είναι το μισό του μεγάλου άξονα της έλλειψης, δηλαδή $|w|_{max}=3$ και η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι το μισό του μικρού άξονα, δηλαδή $|w|_{min}=2$.

Β4. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$|z-w| \le |z|+|w| \le |z|+|w|_{max} = 1+3 = 4$, $|z-w| \ge ||z|-|w|| \ge ||z|-|w|_{min}| = |1-2| = 1$. Άρα $1 \le |z-w| \le 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}=\frac{x\ln x+x-1}{x}$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1)=0$. Για $x>1 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x\ln x>0$.

Επίσης $x>1 \Leftrightarrow x-1>0$

Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$x\ln x+x-1>0 \Leftrightarrow \frac{x\ln x+x-1}{x}>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$.

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘		↗	
			ελάχιστο		

Για $x<1$ ομοίως προκύπτει ότι $f'(x)<0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=-1$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x-1)\ln x+x-1\right]=+\infty$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f((0,+\infty))=[-1,+\infty)$.

Γ2. Έχουμε $x^{x-1}=e^{2013} \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2013 \Leftrightarrow f(x)=2012$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}[(x-1)\ln x-1]=+\infty$ γιατί $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(0,1]$, άρα $f(\Delta_1)=[-1,+\infty)$. Το $2012\in f(\Delta_1)$ άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2012$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[1,+\infty)$, άρα $f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$. Το $2012\in f(\Delta_2)$ άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=2012$.

Τελικά η εξίσωση $f(x)=2012$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Έστω η συνάρτηση $h(x)=(f(x)-2012)e^x$. Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων . Η h είναι παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=f'(x)e^x+(f(x)-2012)e^x=(f'(x)+f(x)-2012)e^x$

$h(x_1)=(f(x_1)-2012)e^{x_1}=(2012-2012)e^{x_1}=0$

$h(x_2)=(f(x_2)-2012)e^{x_2}=(2012-2012)e^{x_2}=0$. Τελικά έχουμε $h(x_1)=h(x_2)$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε

$h'(x_0)=0 \Leftrightarrow (f'(x_0)+f(x_0)+2012)e^{x_0}=0 \Leftrightarrow f'(x_0)+f(x_0)=2012$

Γ4. $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$. Από Γ_1 έχουμε f(1)=-1 , για $x>1 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>-1$ και για $x<1 \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(1) \Leftrightarrow f(x)>-1$. Άρα $f(x)=-1 \Leftrightarrow x=1$ και $f(x)\geq -1 \Leftrightarrow f(x)+1\geq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Άρα $E=\int_1^e |g(x)|\,dx=\int_1^e |f(x)+1|\,dx=\int_1^e (f(x)+1)dx=\int_1^e (x-1)\ln x dx=\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}-x\right)'\ln x dx=$

$$\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{e^2}{2}-e-\left[\frac{x^2}{4}-x\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-e-\frac{e^2}{4}+e+\frac{1}{4}-1=\frac{e^2-3}{4}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g(x)=\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt-\frac{x-x^2}{e}\geq 0, \forall x>0$. Η f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt$ παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων και $g'(x)=f(x^2-x+1)(2x-1)-\frac{1-2x}{e}, x>0$. Είναι $g(x)\geq g(1), \forall x>0$,δηλαδή η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ και g παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, άρα από Θ.Fermat $g'(1)=0 \Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$. Όμως $f(x)\neq 0, \forall x>0$ και συνεχής άρα $f(x)<0, \forall x<0$. Οπότε :

$$\ln x-x=\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)$$

Όμως $\ln x\leq x-1<x, \forall x>0$ δηλαδή $\ln x-x<0, \forall x>0$. Άρα

$\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)f(x)=\ln x-x\neq 0, \forall x>0$ οπότε $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\neq 0, \forall x>0$. Τελικά $f(x)=\dfrac{\ln x-x}{\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}, \forall x>0$

Είναι $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα $\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και τελικά f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγισίμων. Τότε

$\frac{\ln x-x}{f(x)}=\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e$ Παραγωγίζοντας τη σχέση έχουμε:

$$\left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)' \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x-x}{f(x)}\right)'=\frac{\ln x-x}{f(x)} \Leftrightarrow \frac{\ln x-x}{f(x)}=ce^x, x>0$$

Για $x=1$, $\dfrac{-1}{-\frac{1}{e}}=ce \Leftrightarrow c=1$. Άρα $f(x)=\frac{\ln x-x}{e^x}=e^{-x}(\ln x-x), x>0$

Δ2. Έχουμε $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$. Έστω $\frac{1}{f(x)}=u$, καθώς $x\to 0^+$ είναι $u\to 0$. Τότε

$f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)=\frac{1}{u^2}\eta\mu u-\frac{1}{u}=\frac{\eta\mu u-u}{u^2}$. Άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]=\lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\frac{1}{2}\lim_{u\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}=0$$

Δ3. Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η F παραγωγίζεται $\forall x>0$ με $F'(x)=f(x)$. Η f παραγωγίζεται $\forall x>0$ άρα και η F΄ παραγωγίζεται $\forall x>0$ με $F''(x)=-e^{x}(\ln x-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)=-e^{-x}\left(\ln x-x+1-\frac{1}{x}\right)=-e^{-x}\left(\ln x-(x-1)-\frac{1}{x}\right)>0$ άρα η f κυρτή. Αρκεί να δείξουμε ότι $F(3x)-F(2x)>F(2x)-F(x)$. Η F παραγωγίσιμη στο $[x,2x]$ και $[2x,3x]$, $x>0$.

Από ΘΜΤ υπάρχουν $x_1\in(x,2x)$ και $x_2\in(2x,3x)$ τέτοια ώστε $F'(x_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{x}$ και

$F'(x_2)=\dfrac{F(3x)-F(2x)}{x}$. Όμως $x_1<x_2$ και F΄ γνησίως αύξουσα αφού η F κυρτή. Άρα

$$F'(x_1)<F'(x_2)\Leftrightarrow\frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\quad F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)$$

Δ4. Έστω $h(x)=2F(x)-F(3\beta)-F(\beta)$. Η h συνεχής στο $[\beta,2\beta]$ με $h(\beta)=2F(\beta)-F(3\beta)-F(\beta)=F(\beta)-F(3\beta)$

$h(2\beta)=2F(2\beta)-F(3\beta)-F(\beta)=2F(2\beta)-(F(3\beta)+F(\beta))$. Όμως από Δ3 για $x=\beta$ έχουμε:

$2F(2\beta)<F(3\beta)+F(\beta)\Leftrightarrow 2F(2\beta)-\left(F(3\beta)+F(\beta)\right)<0\Leftrightarrow h(2\beta)<0$

$F'(x)=f(x)<0$ άρα η F γνησίως φθίνουσα άρα $\beta<3\beta\Leftrightarrow F(\beta)>F(3\beta)\Leftrightarrow F(\beta)-F(3\beta)>0\Leftrightarrow h(\beta)>0$. Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$. Όμως $h'(x)=2F'(x)=2f(x)<0,\forall x>0$ άρα h γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε το ξ είναι μοναδικό

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΣΩΚΡΑΤΗΣ ΜΑΚΡΑΚΗΣ
ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΝΕΥΜΑΤΙΚΑΚΗΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΣΑΜΠΟΥΡΗΣ • ΚΩΣΤΑΣ ΑΣΦΕΝΤΑΓΑΚΗΣ
ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΠΕΤΑΝΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΤΕΡΖΑΚΗ