# Πανελλαδικές Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων

Εξεταζόμενο μάθημα: ***Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών***

## Τετάρτη, 16 Ιουνίου 2021

## Ενδεικτικές απαντήσεις θεμάτων

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 135

**Α2.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 51-52

**Α3.** Σχολικό βιβλίο, σελίδα 23

**Α4.** 1.Σ, 2.Λ, 3.Σ, 4.Σ, 5.Σ.

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (1)

Θέτουμε $k=x+1$ τότε $x=k-1$ για κάθε $k\in\mathbb{R}$.

Άρα (1) $f(k)=k\cdot e^{-(k-1)}$

$f(k)=k\cdot e^{1-k}$

ή $f(x)=x\cdot e^{1-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Β2.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=e^{1-x}-x\cdot(e^{1-x})$$

$$f'(x)=e^{1-x}(1-x)$$


Νεφέλης 1, Αφαία Χαϊδαρίου | τηλ: 210 5573301 | e-mail: neapaideia@neapaideia.gr | www.neapaideia.gr

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$

| χ | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | 0 | - | |
| $f$ | | ↗ | ο. μ. | ↘ | |

άρα $f$ γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και γνησίως φθίνουσα $[1,+\infty)$

Οπότε στο $x_0=1$ η $f$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f_{\max}=f(1)=1$ οπότε $f(x)\le f(1) \Leftrightarrow f(x)\le 1$.

**Β3.** Η $f'$ παραγωγίσιμη ως γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

- $f''(x)=[e^{1-x}(1-x)]'=-e^{1-x}(2-x)=e^{1-x}(x-2)$
- $f''(x)\le 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2)\le 0 \Leftrightarrow x-2\le 0 \Leftrightarrow x\le 2$


Νεφέλης 1, Αφαία Χαϊδαρίου | τηλ: 210 5573301 | e-mail: neapaideia@neapaideia.gr | www.neapaideia.gr

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\frown$ | | $\smile$ | |

Η $f$ είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$ και κυρτή στο $[2,+\infty)$.

Η $f''(2)=0$ και επομένως η $f$ παρουσιάζει σημείο καμπής στο σημείο $\mathrm{K}\left(2,\dfrac{2}{e}\right)$.

Δεν αναζητάμε κατακόρυφη ασύμπτωτη, επειδή η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

<u>Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-0\cdot x]=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot e^{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\overset{D.L.H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$$

Άρα η $y=0$ δηλαδή ο $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $f$ στο $+\infty$.

<u>Αναζητάμε πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$</u>

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x}\right)=+\infty\ \notin\mathbb{R}$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\cdot e^{1-x}\right)=-\infty \notin \mathbb{R}$

οπότε η $f$ <u>δεν</u> εμφανίζει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

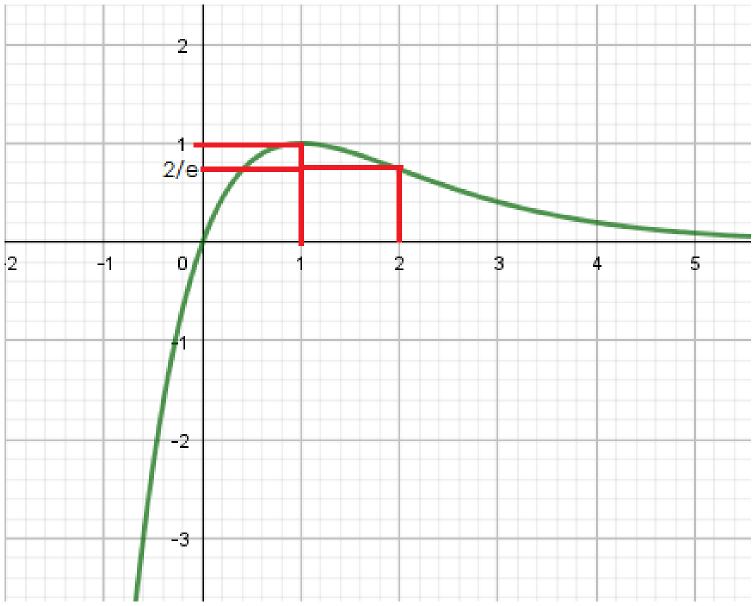
**B4.α.** Από το ερώτημα **B2** έχουμε τα εξής:

- Στο $A_1=(-\infty,1]$ αφού $f$ γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$, τότε το σύνολο τιμών είναι $f(A_1)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(1)]=(-\infty,1]$

- Στο $A_2=[1,+\infty)$ αφού η $f$ γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ το σύνολο τιμών της $f$ είναι $f(A_2)=(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)]=(0,1]$.

Άρα τελικά το σύνολο τιμών της $f$ είναι $f(A)=(-\infty,1]$

## Β4.β.




- αν λ≤0 η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα.
- $0<\lambda<1$ η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.
- αν λ=1 η εξίσωση $f(x)=\lambda \Leftrightarrow f(x)=1$ έχει 1 ακριβώς ρίζα.
- αν λ>1, εξίσωση $f(x)=\lambda$ είναι αδύνατη, γιατί η $f$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 1 το $f(1)=1$.

## ΘΕΜΑ Γ

## Γ1.

- Η $f$ συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική.
- Η $f$ συνεχής στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.
- Εξετάζουμε αν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

  Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1,\ \lim\limits_{x\to 0^+}(\sigma\upsilon\nu x)=1,\ f(0)=1$


Νεφέλης 1, Αφαία Χαϊδαρίου | τηλ: 210 5573301 | e-mail: neapaideia@neapaideia.gr | www.neapaideia.gr

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$, οπότε η $f$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Τελικά η $f$ συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

Ελέγχω αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

- $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{ax^3-3x^2-x}{x}\right) =$
  $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x\left(ax^2-3x-1\right)}{x}\right) = -1$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

Αφού $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) \neq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$ η $f$ <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

## Γ2. (i)

<u>1η Προϋπόθεση</u>: Η $f$ είναι συνεχής στο $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική και $f$ συνεχής στο $x_0 = 0$ από το ερώτημα (Γ1). Άρα $f$ είναι συνεχής $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

<u>2η Προϋπόθεση</u>: Η $f$ παραγωγίσιμη *στο* $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ως τριγωνομετρική.

<u>3η Προϋπόθεση</u>: Το $f(0) = 1$, ενώ το $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, επομένως



Νεφέλης 1, Αφαία Χαϊδαρίου | τηλ: 210 5573301 | e-mail: neapaideia@neapaideia.gr | www.neapaideia.gr

$f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

**Γ2. (ii)** Για x$\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε: $f'(x) = -\eta\mu x$ άρα

$f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow -\eta\mu\xi = 0 \Leftrightarrow \eta\mu\xi = \eta\mu 0 \Leftrightarrow \xi = k\pi$ , $k \in \mathbb{Z}$ .

Αφού $0 < \kappa < \frac{3\pi}{2}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}$ θα είναι κ=1, οπότε η μοναδική λύση είναι ξ=π.

**Γ3.** Αρκεί να δείξουμε ότι **δεν** υπάρχει $x_0 \in (-\infty, 0)$ για το οποίο να ισχύει ότι $f'(x_o) = 0$

Για x<0 έχουμε ότι $f(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1$ που είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$.

Τότε

$$\Delta = 36 + 12\alpha = 12(3+\alpha) < 0 \text{ , αφού } \alpha < -3.$$

Άρα $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

Δηλαδή <u>δεν</u> υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της $f$ να είναι παράλληλη στο x′x διότι, η $f'$ δεν μηδενίζεται.

**Γ4.**

- Για $x \leq 0$, η $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$ αφού α<0 και Δ<0 (από Γ3) και $f$ συνεχής άρα $f$ *γνησίως* φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

- Για $0<x\leq \frac{3\pi}{2}$, έχουμε ότι $f'(x)=-\eta\mu x$

| χ | 0 | | π | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | | + | |

Αφού η $f$ συνεχής στο $x_0=0$ προκύπτει ο πίνακας πρόσημου της $f'$ και μονοτονίας της $f$

| χ | $-\infty$ | | 0 | | π | | $\frac{3\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | - | | - | | + | |
| $f$ | | ↘ | | ↘ | ο.ε. | ↗ | |

Άρα η $f$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο π, επομένως εξ' ορισμού ολικού ελαχίστου για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει οτι $f(x)\geq f(\pi)\Leftrightarrow f(x)\geq -1$.

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Έστω $\quad g(x)=\ln x-\frac{1}{x}, x\in[1,e]$

- g συνεχής στο $[1,e]$ ως πράξη συνεχών

- $g(1)=-1<0$
- $g(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}>0$

άρα είναι: $\quad g(1)\cdot g(e)<0$

Συνεπώς ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,e)$ : $g(x_0)=0$

Η g παραγωγίσιμη οπότε $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0,\ x\in(1,e)$ άρα έχουμε μοναδικό $x_0\in(1,e)$ : $g(x_0)=0$

**Δ2.** Η $f$ λόγω του προηγούμενου ερωτήματος γίνεται:

$f(x)=\ln x_0\cdot(x+1)-\ln x-1 \overset{\ln x_0=\frac{1}{x_o}}{=} \frac{1}{x_o}\cdot(x+1)-\ln x-1$ που είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=\frac{1}{x_o}-\frac{1}{x} \text{ με } x_0\in(1,e)$$

$$f'(x)>0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_o}>\frac{1}{x}\Leftrightarrow x>x_o$$

| χ | 0 | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|



Νεφέλης 1, Αφαία Χαϊδαρίου | τηλ: 210 5573301 | e-mail: neapaideia@neapaideia.gr | www.neapaideia.gr

| | | | |
|---|---|---|---|
| $f'$ | - | 0 | + |
| $f$ | ↘ | | ↗ |

ολικό ελάχιστο στο $x_0$ με $f(x_0)=0$

$$f(x_0)=\frac{1}{x_0}(x_0+1)-\ln x_0-1$$
$$f(x_0)=1+\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1$$
$$f(x_0)=0.$$

---

**Δ3.** Για $x\le 0$, ισχύει $g(x)\le 0$, h(x)>0

Άρα οι δύο συναρτήσεις δεν έχουν κανένα κοινό σημείο για $x\le 0$

Αν x > 0

$$g(x)=h(x)\Leftrightarrow x\cdot e^{-x}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\Leftrightarrow \ln x-x=(x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)\Leftrightarrow$$
$$\ln x-x=(x+1)(\ln x_0-1)\Leftrightarrow \ln x=(x+1)\ln x_0-1\Leftrightarrow (x+1)\ln x_0-\ln x-1=0\Leftrightarrow$$
$$f(x)=0$$

Άρα το $x=x_0$ μοναδική ρίζα της $f$ οπότε οι $C_g$, $C_h$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

- g παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγισίμων συναρτήσεων
- h παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$h'(x_0) = g'(x_0) \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot (\ln x_0 - 1) = e^{-x_0}(1 - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1-x_0}{x_0}\right) = e^{-x_0}(1 - x_0)$$

Επειδή $x_0 \in (1, e)$ έχουμε

$$\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{1}{x_0} = e^{-x_0} \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} = x_0 \cdot e^{-x_0} \Leftrightarrow h(x_0) = g(x_0)$$

ισχύει αφού $x_0$ η τετμημένη κοινού σημείου.

**Δ4.** Έστω $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, φ συνεχής

Η κατακόρυφη απόσταση είναι $d(x) = |f(x) - \varphi(x)|$

Αφού $f(x) > \varphi(x)$ τότε $\text{d(x)} = f(x) - \varphi(x), x > 0$

Η d παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ , $x_0 \in (0, +\infty)$: $d(x) \geq d(x_0)$.

- Αν η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό $x_0$ τότε και η d θα είναι παραγωγίσιμη ως αλγεβρικό άθροισμα των παραγωγισίμων συναρτήσεων $f(x)\ και\ \varphi(x)$ στο $(0, +\infty)$. Επομένως από το Θεώρημα Fermat είναι:
$d'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) - \varphi'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) = \varphi'(x_o)$.

Όμως γνωρίζουμε ότι $f'(x_o)=0$ άρα και $\varphi'(x_o)=0$

Επομένως το $x_0$ είναι η τετμημένη του κρίσιμου σημείου της φ.

- Αν η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό $x_0$ του $(0,+\infty)$, τότε εξ' ορισμού το $x_0$ είναι πάλι η τετμημένη του κρίσιμου σημείου της φ.