Τα καλύτερα Φροντιστήρια της πόλης

Απαντήσεις

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα Α

Α1) Σχολικό σελ 16

Α2) Σχολικό σελ 65

Α3) α-Λ, β-Σ, γ-Σ, δ-Σ, ε-Λ

Α4)

$$i)\ (\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'=\sigma\upsilon\nu^2 x-\eta\mu^2 x$$

$$ii)\ \left(\frac{x^2+1}{2x+3}\right)'=\frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$$

$$iii)\ \left(\sqrt{x^2+2x+5}\right)'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

$$iv)\ \left[\left(x^2+1\right)^3\right]'=6x\left(x^2+1\right)^2$$

Θέμα Β

i) Είναι $f(3)=3+1=4$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

Επομένως $f(3)\cdot f\left(-\frac{1}{2}\right)=4\cdot\frac{1}{4}=1$ και οι αριθμοί $f(3),\ f\left(-\frac{1}{2}\right)$ είναι αντίστροφοι

ii) Αν $x\geq 0$ η εξίσωση γίνεται

$f(x)=9\Leftrightarrow x+1=9\Leftrightarrow x=8$ δεκτή

Αν $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$f(x)=9\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow\sqrt{x^2}=\sqrt{9}\Leftrightarrow|x|=3\Leftrightarrow x=3\ \alpha\pi o\rho$ ή $x=-3$ δεκτή

2) i) Είναι

$$\nu=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x}{\sqrt{x+20}-5}=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{\left(\sqrt{x+20}-5\right)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{\sqrt{x+20}^{\,2}-5^2}=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x(x-5)\left(\sqrt{x+20}+5\right)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\left(x\left(\sqrt{x+20}+5\right)\right)=5\cdot\left(\sqrt{5+20}+5\right)=5\cdot(5+5)=50$$

ii) Ο πίνακας είναι

xi	vi	fi	fi%	Ni	Fi	Fi%
0	4	0,08	8	4	0,08	8
1	6	0,12	12	10	0,2	20
2	12	0,24	24	22	0,44	44
3	18	0,36	36	40	0,8	80
4	8	0,16	16	48	0,96	96
5	2	0,04	4	50	1	100
ΣΥΝ	50	1	100			

iii) Το ποσοστό των μαθητών που διάβασε λιγότερα από 3 βιβλία είναι 44%

iv) Το πλήθος των μαθητών που διάβασε 5 βιβλία είναι 2

<u>**Θέμα Γ**</u>

α) $f(x-2)-4=(x-2)^2-6(x-2)+1-4=x^2-4x+4-6x+12+1-4=x^2-10x+13$

β) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-6x+1=x^2-10x+13\Leftrightarrow -6x+10x=-1+13\Leftrightarrow 4x=12\Leftrightarrow x=3$

$f(3)=3^2-6\cdot 3+1=9-18+1=-8$

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $\mathrm{A}(3,-8)$

γ)

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+7}{\sqrt{g(x)+10x-16}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+1+7}{\sqrt{x^2-10x+13+10x-16}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x^2-3}-1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{\sqrt{x^2-3}-1}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-3}-1\right)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{\sqrt{x^2-3}^{\,2}-1^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{x^2-3-1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)\left(\sqrt{x^2-3}+1\right)}{x+2}=\frac{(2-4)\left(\sqrt{2^2-3}+1\right)}{2+2}=\frac{-2\cdot 2}{4}=-1$$

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με παράγωγο $f'(x)=2x-6$

Για να είναι ο ρυθμός μεταβολής της f είναι μεγαλύτερος από 4 πρέπει

$f'(x)>4 \Leftrightarrow 2x-6>4 \Leftrightarrow 2x>10 \Leftrightarrow x>5$

ε) Για $x=1$ είναι $f(1)=1^2-6\cdot 1+1=-4$ και $f'(1)=2\cdot 1-6=-4$

Η εφαπτομένη έχει τη μορφή $y=f'(1)\cdot x+\beta$ δηλαδή $y=-4\cdot x+\beta$

Για $x=1,\ y=f(1)=-4$ προκύπτει $-4=-4\cdot 1+\beta \Leftrightarrow \beta=0$

Επομένως η εφαπτομένη είναι η ευθεία $y=-4x$

στ) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$

Η g έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$

Το κοινό τους πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}$

Ο τύπος της συνάρτησης είναι

$h(x)=f(x)+g(x)=x^2-6x+1+x^2-10x+13=2x^2-16x+14$

Η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x)=\left(2x^2-16x+14\right)'=2\cdot 2x-16\cdot 1+0=4x-16$

Η παράγωγος μηδενίζεται αν $h'(x)=0 \Leftrightarrow 4x-16=0 \Leftrightarrow x=4$

και είναι θετική αν $h'(x)>0 \Leftrightarrow 4x-16>0 \Leftrightarrow 4x>16 \Leftrightarrow x>4$

Ο πίνακας μονοτονίας της h είναι

x	$-\infty$		4		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$		$\nearrow$	

Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,4\right]$ και αύξουσα στο διάστημα $\left[4,+\infty\right)$

Έχουμε ολικό ελάχιστο για x=4 το $h\left(4\right)=2\cdot 4^2-16\cdot 4+14=32-64+14=46-64=-18$

Θέμα Δ

i) Από την υπόθεση δίνεται ότι $f\left(0\right)=1$, οπότε

$$f\left(x\right)=\frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+\beta}\Rightarrow f\left(0\right)=\frac{0^2+0+1}{0^2+\beta}\Rightarrow 1=\frac{1}{\beta}\Rightarrow \beta=1$$

Η ευθεία $y=x+7$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=1$

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+\alpha x+1}{x^2+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

παράγωγο

$$f'\left(x\right)=\left(\frac{x^2+\alpha x+1}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2+\alpha x+1\right)'\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2+\alpha x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{\left(2x+\alpha\right)\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot\left(x^2+\alpha x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}+\cancel{2x}+\alpha x^2+\alpha-\cancel{2x^3}-2\alpha x^2-\cancel{2x}}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-\alpha x^2+\alpha}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία στο σημείο Α(0,1) πρέπει να ισχύει

$$f'(0)\cdot\lambda=-1\Leftrightarrow\frac{-\alpha\cdot 0^2+\alpha}{\left(0^2+1\right)^2}\cdot 1=-1\Leftrightarrow +\alpha=-1$$

Άρα τελικά ο τύπος της f γράφεται $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$ και η παράγωγος είναι $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}$

ii) Ο πίνακας μονοτονίας είναι

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$

Στο -1 παρουσιάζεται τοπικό μέγιστο με τιμή $f(-1)=\frac{(-1)^2-(-1)+1}{(-1)^2+1}=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$

Στο 1 παρουσιάζεται τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(1)=\frac{1^2-1+1}{1^2+1}=\frac{1}{2}$

iii) Για να είναι παράλληλη η εφαπτομένη στον x'x πρέπει να ισχύει $f'(x)=0$, επομένως

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-1$$

iv) Τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων είναι $A_f=\mathbf{R}$, $A_g=\mathbf{R}$
Το κοινό πεδίο ορισμού είναι $A_{f+g}=\mathbf{R}$
Ο τύπος είναι

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}+\frac{\sigma\upsilon\nu x+x}{x^2+1}=\frac{x^2-\cancel{x}+1+\sigma\upsilon\nu x+\cancel{x}}{x^2+1}=\frac{x^2+1+\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1}$$

v) Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση είναι άρτια

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι $A_{f+g}=\mathbf{R}$
Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ είναι και $-x\in\mathbf{R}$
Επιπλέον

$$(f+g)(-x)=\frac{(-x)^2+1+\sigma\upsilon\nu(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{x^2+1+\sigma\upsilon\nu x}{x^2+1}=(f+g)(x)$$

Άρα η συνάρτηση είναι άρτια και η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y'y

Βανούσης Χρίστος

Διακρότημα Νέο Ηράκλειο