ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(ax + \sqrt{x^2+1}\right)$ με α>0 ,για την οποία ισχύει $f'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5}$.

i)Να δείξετε ότι α=1 ,να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία της f.

ii)Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f .

iii)Να βρείτε την αντίστροφη της f.

iv)Να λύσετε την εξίσωση f'(x)+f'(3x)=f'(2x)+f'(5x).

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

i) $f'(x) = \frac{1}{\alpha x+\sqrt{x^2+1}} \cdot (\alpha x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{\alpha x+\sqrt{x^2+1}}(\alpha + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

$f'(\frac{3}{4}) = \frac{4}{5}$ ⇔……….<=> *α=1*

για α=1 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

για το πεδίο ορισμού πρέπει : $x^2+1\geq 0$ *που ισχύει και* $x+\sqrt{x^2+1}>0$ *(1)*

αν $x\geq 0$ *η (1) προφανώς ισχύει , αν* $x<0$ *έχουμε* $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| = -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x>0$

άρα η ανίσωση ισχύει για κάθε x πραγματικό οπότε το πεδίο ορισμού είναι το R.

$f'(x)=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ *άρα f γνησίως αύξουσα.*

ii) $f''(x)=\frac{-\sqrt{x^2+1}'}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=0 \Leftrightarrow x=0$ *, ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός οπότε το πρόσημο*

εξαρτάται μόνο από τον αριθμητή,

X	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		+	0	−	
f		$\cup$		$\cap$	

για x =0 έχουμε σημείο καμπής το (0,0)

iii) *Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται,*

θέτω $f(x)=y$ *οπότε* $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Leftrightarrow \ln e^y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Leftrightarrow e^y - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow (e^y-x)^2 = x^2+1 \Leftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + x^2 = x^2+1$

$x=\frac{e^{2y}-1}{2e^y}$ *άρα* $f^{-1}(x) = \frac{e^{2x}-1}{2e^x}$ *, με x πραγματικό.*

iv) *Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα το 0 , θα δείξουμε ότι είναι μοναδική: για x<0 η f′ είναι γνησίως αύξουσα αφού είναι κυρτή οπότε*
$x>2x \Leftrightarrow f'(x)>f'(2x)$ *(1)* ,$3x>5x \Leftrightarrow f'(3x)>f'(5x)$ *(2)*
με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει $f'(x)+f'(3x)>f'(2x)+f'(5x)$ *δηλ.η εξίσωση δεν έχει λύση,*
για x>0 η f′ είναι γνησίως φθίνουσα ,με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $f'(x)+f'(3x)>f'(2x)+f'(5x)$,
άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα την x=0.

ΚΟΥΚΟΥΓΙΑΝΝΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ
ΠΕΥΚΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΠΕΥΚΑ