ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με f(1)=1

και ισχύει η σχέση : $x^2 \cdot (f'(x) - 1) = ln\, x - 1$, για κάθε $x > 0$

Γ1) Να βρεθεί ο τύπος της f Μονάδες 5

Αν $f(x) = x - \frac{ln\, x}{x}$, για κάθε $x > 0$,

Γ2) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο στη θέση x=1 και να βρείτε το είδος του Μονάδες 8

Γ3) Να δείξετε ότι $x^{\frac{1}{x+1}} \geq e^{1-x}$, για κάθε $x \geq 1$ · Μονάδες 4

Γ4) Να βρεθεί το σημείο της Cf, για το οποίο ο ρυθμός μεταβολής γίνεται μέγιστος.

Μονάδες 4

Γ5) Να δείξετε ότι, $f(x) \geq x - \frac{1}{e}$, για κάθε $0 < x < e^{\frac{3}{2}}$

Μονάδες 4

Λύση

Γ1)

Ισχύει ότι: $x^2 \cdot (f'(x)-1) = ln\,x - 1, \forall x>0$

$$f'(x)-1 = \frac{\ln x - 1}{x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{1-\ln x}{x^2} + 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-\frac{\ln x}{x} + x\right)' \Rightarrow$$

Άρα $f(x) = -\frac{ln\,x}{x} + x + C, x>0, C \in \mathbb{R}$

Για x=1 έχουμε: $f(1) = -\frac{ln\,1}{1} + 1 + C \Rightarrow$

$$1 = 0 + 1 + c \Rightarrow$$

$$C = 0$$

Άρα $f(x) = x - \frac{ln\,x}{x}, x>0$

Γ2) Έχουμε ότι: $f'(x) = \frac{ln\,x-1}{x^2} + 1, x>0 \Rightarrow$

$$f'(x) = \frac{ln\,x - 1 + x^2}{x^2}, x>0$$

Λύνουμε : $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{ln\,x-1+x^2}{x^2} = 0 \Rightarrow ln\,x - 1 + x^2 = 0$

Ονομάζω $g(x) = ln\,x - 1 + x^2, x>0$

Παρατηρούμε ότι, $g(1) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2x > 0, x>0$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Επομένως το 1 είναι μοναδική ρίζα της g

Τα πρόσημα της f' εξαρτώνται μόνο από την ποσότητα του αριθμητή που την έχουμε ονομάσει g.

Άρα αρκεί να βρούμε τα πρόσημα της g

Για x<1=> $g(x) < g(1) \Rightarrow g(x) < 0$, όπου g γνησίως αύξουσα.

Άρα και η $f'(x) < 0$ για x<1

Για x>1=> $g(x) > g(1) \Rightarrow g(x) > 0$,όπου g γνησίως αύξουσα.

Άρα και η $f'(x) > 0$ για x>1

Επομένως η f παρουσίαζει μοναδικό τοπικό ακρότατο στη θέση x=1 , και μάλιστα, τοπικό ελάχιστο.

Γ3) Θα δείξουμε ότι, $x^{\frac{1}{x+1}} \geq e^{1-x}$, για κάθε $x \geq 1$

Επεξεργαζόμαστε τη σχέση που θέλουμε να δείξουμε, για να τη φέρουμε σε μια πιο ευνοϊκή μορφή,

$$ln\, x^{\frac{1}{x+1}} \geq ln\, e^{1-x} =>$$

$$\frac{1}{x+1} ln\, x \geq 1 - x, x + 1 > 0 =>$$

$$\ln x \geq (1 - x)(1 + x) =>$$

$$ln\, x \geq 1 - x^2 =>$$

$$ln\, x + x^2 - 1 \geq 0$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι , $ln\, x + x^2 - 1 \geq 0$, για κάθε $x \geq 1$

Παρατηρούμε ότι, έχουμε ονομάσει στο 2ο ερώτημα,

$$g(x) = ln\, x - 1 + x^2$$

Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι, $g(x) \geq 0, \forall x \geq 1$, πράγμα που το αποδείξαμε στο 2ο ερώτημα.

Γ4) Για να βρούμε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης ο ρυθμός μεταβολής γίνεται μέγιστος, θα μελετήσουμε τη μονοτονία της f'

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, και έχουμε ότι:

$f''(x) = \frac{3-2\, ln\, x}{x^3}, x > 0$

Άρα $f''(x)$=0 => $\frac{3-2\, ln\, x}{x^3} = 0 => x = e^{3/2}$>0

Παρατηρούμε ότι, για $0 < x < e^{3/2}$, η $f''(x) > 0$

και για $x > e^{3/2}$, $f''(x) < 0$

Άρα η f’ παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $e^{3/2}$ με τιμή f’($e^{3/2}$).

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f , γίνεται μέγιστος στη θέση $e^{3/2}$ με τιμή f’($e^{3/2}$).

Άρα στο σημείο Μ ($e^{3/2}$, f ($e^{3/2}$))

Γ5) Γνωρίζουμε ότι η f είναι κυρτή στο (0, $e^{3/2}$] (1)

Μπορούμε να βρούμε την εφαπτομένη της f στο σημείο (e,f(e)), καθώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$,

$y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e)$, όπου $f(e) = e - \frac{1}{e}$ και $f'(e) = 1$.

Επομένως λύνοντας ως προς y, έχουμε :$y = x - \frac{1}{e}$

Λόγω της (1), έχουμε ότι $f(x) \geq y$, για κάθε $0 < x < e^{3/2}$

Επομένως $f(x) \geq x - \frac{1}{e}$, με την ισότητα να ισχύει για το σημείο επαφής.

ΤΣΙΟΚΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΤΟΥΜΠΑ