ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 1$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις

- $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{h\to 0} \frac{f'(1+2h)-f'(1-h)}{h} = 3$
- $f(\ln x+2x-1) \geq e^{x-1} - x^2+1$, για κάθε $x>0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f''(1)=1$ και στην συνέχεια ότι η f είναι κυρτή. *Μονάδες 6*

Δ2. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $x_o=1$ και στην συνέχεια να δείξετε ότι $3f(x) + x \geq 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. *Μονάδες 7*

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho \in (0,1)$ ώστε $\rho f'(\rho) + f(\rho) = 1$. *Μονάδες 5*

Δ4. Να δείξετε ότι $e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x+1) f(e^{2x})$ για κάθε $x>0$. *Μονάδες 7*

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε $\lim_{h\to 0}\frac{f\,'(1+2h)-f\,'(1-h)}{h}=3 \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f\,'(1+2h)-f\,'(1)-f\,'(1-h)+f\,'(1)}{h}=$ $3\Rightarrow \lim h\to 0(2\cdot f\,'1+2h-f\,'12h+f\,'1-h-f\,'1-h)=3$

$\lim_{h\to 0}\frac{f\,'(1+2h)-f\,'(1)}{2h}=f''(1)$ και $\lim_{h\to 0}\frac{f\,'(1-h)-f\,'(1)}{-h}=f''(1)$ αφού η f ΄(x) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Άρα 3f ΄΄(1) = 3⇒f ΄΄(1)=1. Η f ΄΄(x) είναι συνεχής συνάρτηση με με f ΄΄(x) ≠ 0, για κάθε x∈ ℝ , άρα η f ΄΄(x) διατηρεί πρόσημο με f ΄΄(1)=1 > 0 ⇒ f ΄΄(x) > 0, για κάθε x∈ ℝ $\xRightarrow{f\ \text{συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη}}$ f κυρτή στο ℝ.

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση K(x)= f (lnx+2x-1) - e^{x-1} + x^2-1, για κάθε x>0 για την οποία ισχύει ότι K(x)≥0 για κάθε x>0 με K(1)=0. Άρα K(x)≥K(1), για κάθε x>0. Η K(x) παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εωτερικό σημείο x_o=1 του πεδίου ορισμού της. Η K(x) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με K΄(x)=f ΄(lnx+2x-1)($\frac{1}{x}$ +2) - e^{x-1} + 2x, για κάθε x>0. από το Θεώρημα Fermat θα ισχύει K ΄(1)=0⇒f ΄(1)= - $\frac{1}{3}$. Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο x_o=1 θα είναι y-f (1)=f ΄(1)(x-1)⇒y = - $\frac{1}{3}x$+ $\frac{4}{3}$. Εφόσον η f είναι κυρτή στο ℝ, η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης σε κάθε σημείο του ℝ θα βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους, άρα f (x) ≥- $\frac{1}{3}x$+ $\frac{4}{3}$ ⇒3f (x) + x ≥ 4, για κάθε x∈ ℝ.

Δ3. Θεωρούμε την συνάρτηση F(x)=x(f(x)-1) και εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στο διάστημα [0,1]. Η F(x) είναι συνεχής στο [0,1] ώς γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο (0,1) ώς γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με F΄(x)=f(x)-1+xf ΄(x)και F(0)=F(1). Άρα υπάρχει ρ ∈ (0,1) ώστε F΄(ρ)=0⇒ρ f ΄(ρ) + f (ρ) = 1.

Δ4. Έστω x>0. Η f ικανοποιεί τις πουποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[e^x,e^{2x}]$, $[e^{2x},e^{3x}]$. Τότε υπάρχει $\alpha\in [e^x,e^{2x}]$ και $\beta\in[e^{2x},e^{3x}]$ ώστε

$f\,'(\alpha)=\frac{f(e^{2x})-f(e^{x})}{e^{2x}-e^{x}}$ και $f\,'(\beta)=\frac{f(e^{3x})-f(e^{2x})}{e^{3x}-e^{2x}}$.

$\alpha < \beta \xRightarrow{f'\nearrow \omega\varsigma\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}} f'(\alpha) < f'(\beta) \Rightarrow \frac{f(e^{2x})-f(e^{x})}{e^{2x}-e^{x}} < \frac{f(e^{3x})-f(e^{2x})}{e^{3x}-e^{2x}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$

$e^x f(e^x) + f(e^{3x}) > (e^x+1) f(e^{2x})$ για ένα x>0

Σαμαρτζής Πέτρος, M. Ed Μαθηματικός

ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ ΝΕΑ ΦΙΛΑΔΕΛΦΕΙΑ