Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$f(1) = ln2$ και $xf'(x) = \frac{1}{x+1} - f(x)$, για κάθε x>0

Β1. Να βρείτε τον τύπο της f .

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Β3. Να αποδείξετε ότι $(x^4 + 3)^{x^4+3} > (x^4 + 4)^{x^4+2}$, για κάθε x∈ $\mathbb{R}$.

Β4. i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈ $(1,3)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2 - \xi$.

ii. Αν $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $h(3) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x)h(x) + \frac{\ln x}{x+1} h(x) + \ln x \cdot \ln(x + 1)h'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1,3)$.

Απαντήσεις

Β1.Έχουμε: $xf'(x)=\frac{1}{x+1}-f(x)\Leftrightarrow xf'(x)+f(x)=\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow$

$\left(xf(x)\right)'=(\ln(x+1))'\Leftrightarrow xf(x)=\ln(x+1)+c$

αφού $f(1)=ln2$ έχουμε $1f(1)=\ln(1+1)+c\Leftrightarrow ln2=ln2+c\Leftrightarrow c=0$

Επομένως, $xf(x)=\ln(x+1)\Leftrightarrow f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Β2. Για κάθε x∈ $(0,+\infty)$ έχουμε:

$f'(x)=\frac{[\ln(x+1)]'\cdot x-ln(x+1)\cdot x'}{x^2}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x+1}x-\ln(x+1)}{x^2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{x-\ln(x+1)(x+1)}{x^2(x+1)}$

Θεωρούμε την $g(x)=x-ln(x+1)(x+1)$ με x ≥ 0 με

$$g'(x)=1-(ln(x+1))'(x+1)-ln(x+1)(x+1)'$$

$$g'(x)=1-\frac{1}{x+1}(x+1)-ln(x+1)$$

$$g'(x)=-ln(x+1)<0 \text{ άρα } g\searrow \text{ στο } [0,+\infty)$$

επομένως για κάθε x>0 ισχύει $g(x)<g(0)\Leftrightarrow g(x)<0$ και άρα $f\searrow$ στο $(0,+\infty)$ και συνεχής με σύνολο τιμών:

$$f(D_f)=(\lim_{x\to+\infty}f(x),lim_{x\to0^+}f(x))=(0,1)$$

εφόσον

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln(x+1)}{x}\overset{\substack{D.L.H\\ \frac{\infty}{\infty}}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{ln(x+1)}{x}\overset{\substack{D.L.H\\ \frac{0}{0}}}{\Longrightarrow}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x+1}=1$$

Β3. Για κάθε x∈ $\mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$(x^4+3)<(x^4+4)\overset{f\searrow}{\Rightarrow}f(x^4+3)>f(x^4+4)$

$\frac{\ln(x^4+3)}{x^4+3}>\frac{\ln(x^4+4)}{x^4+4}\Leftrightarrow(x^4+4)\ln(x^4+3)>(x^4+3)\ln(x^4+4)\Leftrightarrow$

$ln(x^4+3)^{x^4+3}>ln(x^4+4)^{x^4+2}\overset{ln\nearrow}{\Longrightarrow}(x^4+3)^{x^4+3}>(x^4+4)^{x^4+2}$

Β4. i Έχουμε την εξίσωση: $f(x) = 2 - x \Leftrightarrow \frac{ln(x+1)}{x} = 2 - x \Leftrightarrow ln(x+1) = 2x - x^2 \Leftrightarrow ln(x+1) + x^2 - 2x = 0$

Επομένως θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x) = ln(x+1) + x^2 - 2x,\ x \in [1,3]$

$\varphi(1) = ln2 + 1 - 2 = ln2 - 1 < 0$ (επειδή $2 < e \overset{ln\nearrow}{\Longrightarrow} ln2 < lne \Leftrightarrow ln2 < 1 \Leftrightarrow$ $ln2 - 1 < 0$)

$\varphi(3) = ln4 + 9 - 6 = ln4 + 3 > 0$

φ συνεχής στο [1,3] από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $\varphi(\xi) = 0 \Leftrightarrow ln(\xi+1) + \xi^2 - 2\xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 2 - \xi$

Επίσης,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x+1} + 2x - 2 = \frac{1 + (2x-2)(x+1)}{x+1} = \frac{1 + 2x^2 + 2x - 2x - 2}{x+1}$$

$= \frac{2x^2-1}{x+1} > 0$ για κάθε $x \in [1,3]$ άρα $\varphi \nearrow$ στο $[1,3]$ άρα ξ μοναδική ρίζα της φ.

ii. Η εξίσωση γίνεται ως εξής:

$\frac{ln(x+1)}{x} h(x) + \frac{\ln x}{x+1} h(x) + \ln x \ln(x+1)\, h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{x} ln(x+1)\, h(x) + \frac{1}{x+1} lnx\, h(x) + \ln x \ln(x+1)\, h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(lnx)' ln(x+1)\, h(x) + (\ln(x+1))' lnx\, h(x) + \ln x \ln(x+1)\, h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$(ln(x+1) \cdot h(x) \cdot lnx)' = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $t(x) = ln(x+1) \cdot h(x) \cdot lnx$

- t συνεχής στο [1,3]
- t παραγωγίσιμη στο (1,3)
- $t(1) = ln2 \cdot h(1) \cdot ln1 = 0$
  $t(3) = ln4 \cdot h(3) \cdot ln3 = 0$
  Από το Θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε $t'(\xi_1) = 0$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΓΙΑΝΝΑΚΟΥ ΝΙΚΗ

ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ ΒΟΥΛΑΣ