

ΛΥΣΗ

α) Είναι $|x| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 4$

Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$\begin{aligned} f(x) &= |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16| = \\ &= 3|x - 4| - 2|x - 4| - 3|x^2 - 16| = \\ &= |x - 4| - 3|x^2 - 16|. \end{aligned}$$

Επειδή $x \leq 4 \Leftrightarrow x - 4 \leq 0$. Άρα $|x - 4| = 4 - x$.

Επιπλέον $|x| \leq 4 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 16 \Leftrightarrow x^2 - 16 \leq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 16| = 16 - x^2$.

Άρα: $f(x) = 4 - x - 3(16 - x^2) = 4 - x - 48 + 3x^2 = 3x^2 - x - 44$.

β)

- i. Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, δηλαδή $3x^2 - x - 44 = 0$.

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 44 = 529$ και οι ρίζες:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 23}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{24}{6} = 4 \\ x_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

οι οποίες είναι δεκτές γιατί ανήκουν στο διάστημα $[-4, 4]$.

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $x'x$ είναι $A(4, 0)$ και $B(-\frac{11}{3}, 0)$.

Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$, θέτουμε στον τύπο της f όπου $x = 0$ και βρίσκουμε $y = f(0) = -44$.

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$ είναι $\Gamma(0, -44)$.

- ii. Αφού το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ με μ ακέραιο ανήκει στη γραφική παράσταση της f θα ισχύει: $\mu + 1 \in [-4, 4]$ και $f(\mu + 1) = -20$.

Είναι: $f(\mu + 1) = -20 \Leftrightarrow 3(\mu + 1)^2 - \mu - 1 - 44 = -20 \Leftrightarrow$

$$3\mu^2 + 6\mu + 3 - \mu - 45 + 20 = 0 \Leftrightarrow 3\mu^2 + 5\mu - 22 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι: $\Delta = 25 - 4 \cdot 3 \cdot (-22) = 289$ και οι ρίζες:

$$\mu_{1,2} = \frac{-5 \pm 17}{6} = \begin{cases} \mu_1 = \frac{12}{6} = 2 \\ \mu_2 = \frac{-22}{6} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

Από τις παραπάνω τιμές του μ δεκτή είναι η $\mu = 2$ καθώς είναι ακέραια και επιπλέον $\mu + 1 \in [-4, 4]$.