ΛΥΣΗ

α)

i. Ισχύει ότι $f(0) = -1 \Leftrightarrow 0^2 + 2 \cdot \lambda \cdot 0 + \gamma = -1 \Leftrightarrow \gamma = -1$

ii. Για να μην είναι η γραφική παράσταση της f κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ αρκεί:

$f(x) \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 \geq -\lambda^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x + \lambda^2 \geq 0$,

η οποία γράφεται $(x + \lambda)^2 \geq 0$ που ισχύει.

β) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (2\lambda)^2 - 4(-1) = 4\lambda^2 + 4 = 4(\lambda^2 + 1) > 0,$$

άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες οπότε η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε δύο σημεία.

Οι τετμημένες των σημείων είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2\lambda \pm \sqrt{4(\lambda^2+1)}}{2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} \\ x_2 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} \end{cases}.$$

Επίσης, $-\sqrt{\lambda^2 + 1} < \sqrt{\lambda^2 + 1}$ άρα $-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1} < -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}$.

Οπότε τα σημεία είναι τα $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$.

γ) Η απόσταση των A και B είναι:

$(AB) = |x_2 - x_1| = \left|-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1} - \left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}\right)\right| = \left|2\sqrt{\lambda^2 + 1}\right|$.

Οπότε:

$$(AB) \geq 2 \Leftrightarrow \left|2\sqrt{\lambda^2 + 1}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda^2 + 1} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 0$$

που ισχύει.