ΛΥΣΗ

α) Είναι

$$f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}=\frac{|x-1|-3|1-x|+2|x-2|}{2}=$$

$$=\frac{|x-1|-3|x-1|+2|x-2|}{2}=\frac{2|x-2|-2|x-1|}{2}=$$

$$=\frac{2(|x-2|-|x-1|)}{2}=|x-2|-|x-1|=d(x,2)-d(x,1).$$

β) Η εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow d(x,2)-d(x,1)=0 \Leftrightarrow d(x,2)=d(x,1)$.

Αν $M$ το σημείο του άξονα που αντιστοιχεί στη λύση $x$ της παραπάνω εξίσωσης, αυτό θα πρέπει να ισαπέχει από τα σημεία $A$ και $B$ και κατά συνέπεια θα είναι το μέσο του τμήματος $AB$. Άρα $x=\frac{3}{2}$.

γ) Έχουμε $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-2|=|x-1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=x-1 \Leftrightarrow -2=-1 \\ \text{ή} \\ x-2=-x+1 \Leftrightarrow 2x=3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}. \end{cases}$

Η πρώτη εξίσωση είναι αδύνατη. Άρα $x=\frac{3}{2}$.