ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{1(\alpha+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}^2-\sqrt{\beta}^2}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\alpha-\beta}=\frac{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{1}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}.$$

β)

I. Έχουμε ότι $\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$. Ομοίως $\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$

Οπότε η παράσταση $A=(\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}})^2+(\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}})^2$γίνεται:

$$A=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2+(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=\sqrt{\alpha}^2+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2+\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2$$
$$=\alpha+\beta+\alpha+\beta=2\alpha+2\beta$$

II. Έστω $A>4\sqrt{\alpha\beta}$ δηλαδή $2\alpha+2\beta>4\sqrt{\alpha\beta}$ επομένως $\alpha+\beta>2\sqrt{\alpha\beta}$ ή αλλιώς $\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2>0$, που ισχύει αφού $\alpha\neq\beta$ και $\sqrt{\alpha}^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}^2=\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2>0$

γ) Έχουμε $\alpha-\beta=1$επομένως $\alpha=\beta+1$. Αν αντικαταστήσουμε το α στη σχέση $\alpha\cdot\beta=6$ θα έχουμε $(\beta+1)\cdot\beta=6$ δηλαδή $\beta^2+\beta-6=0$. Έχουμε $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25$. Οπότε

$$\beta_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2\cdot1}\Leftrightarrow$$

$$\beta_{1,2}=\frac{-1\pm5}{2}\Leftrightarrow$$

$$\beta_{1,2}=\begin{cases}\frac{-1--5}{2}\\ \frac{-1+5}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\beta_{1,2}=\begin{cases}-3 \text{ απορρίπεται αφού β θετικός αριθμός}\\ 2 \quad \text{δεκτή.}\end{cases}$$

Άρα θα έχουμε $\alpha=\beta+1=2+1=3$.