ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$f(x)=(x+1)^2-(x-1)^2+1=x^2+2x+1-x^2+2x-1+1=4x+1$$

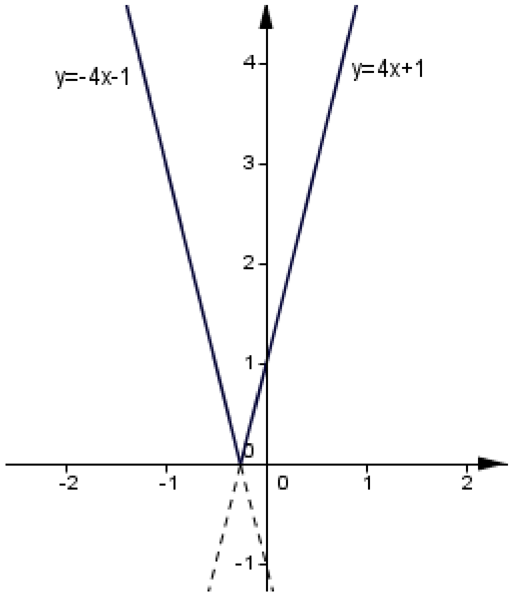
β) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις.

- Αν $4x+1\geq 0$, δηλαδή $x\geq -\frac{1}{4}$, τότε

  $|4x+1|=4x+1$, οπότε $g(x)=4x+1$

- Αν $4x+1<0$, δηλαδή $x<-\frac{1}{4}$, τότε

  $|4x+1|=-4x-1$, οπότε $g(x)=-4x-1$



Η γραφική παράσταση της g(x) φαίνεται στο διπλανό σχήμα και προκύπτει αν σχεδιάσουμε τις ευθείες

$$y=4x+1,\ y=-4x-1$$

και επιλέξουμε την πρώτη όταν $x\geq\frac{1}{4}$ και την δεύτερη, όταν $x<\frac{1}{4}$.

γ) Είναι:

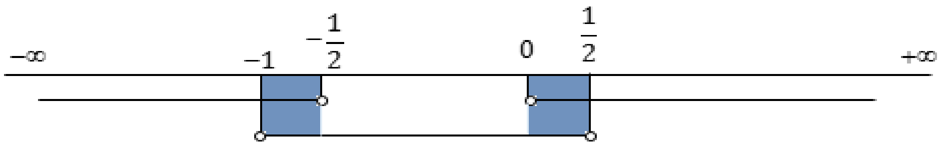
$$1<g(x)<3\Leftrightarrow 1<|4x+1|<3\Leftrightarrow |4x+1|>1 \text{ και } |4x+1|<3$$

Η πρώτη ανίσωση γράφεται:

$$|4x+1|>1\Leftrightarrow 4x+1<-1 \text{ ή } 4x+1>1\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2} \text{ ή } x>0$$

Η δεύτερη ανίσωση γράφεται:

$$|4x+1|<3\Leftrightarrow -3<4x+1<3\Leftrightarrow -4<4x<2\Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{2}$$



Η συναλήθευση των δυο ανισώσεων φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα οπότε οι κοινές λύσεις τους, που είναι οι λύσεις της αρχικής ανίσωσης, είναι όλοι οι αριθμοί x με

$$x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right).$$

δ) Αν ο αρνητικός αριθμός α είναι λύση της αρχικής ανίσωσης, τότε έχουμε:

$$-1<\alpha<-\frac{1}{2}\text{, οπότε } 0<\alpha+1<\frac{1}{2}$$

Έτσι, ο αριθμός $\alpha+1$ είναι επίσης λύση της, που είναι το ζητούμενο.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται με κόκκινο χρώμα οι λύσεις της ανίσωσης $1\leq g(x)\leq 3$.