ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$|x-1| \le \sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x-1 \le \sqrt{3} \Leftrightarrow 1-\sqrt{3} \le x \le 1+\sqrt{3}$$

β) Η μικρότερη λύση της (1) είναι ο αριθμός $x_1 = 1-\sqrt{3}$ και η μεγαλύτερη είναι $x_2 = 1+\sqrt{3}$.

Για το άθροισμα s και το γινόμενο p των αριθμών αυτών ισχύει:

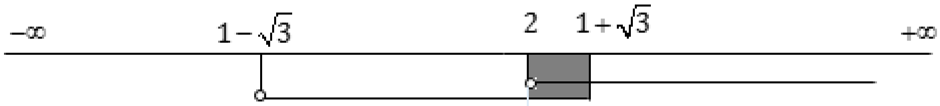
$$s = x_1 + x_2 = 1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 2 \text{ και } p = x_1 x_2 = \left(1-\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right) = 1-3 = -2.$$

Με τη βοήθεια του τύπου $x^2 - sx + p = 0$ βρίσκουμε ότι η εξίσωση με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1), είναι η $x^2 - 2x - 2 = 0$.

γ) Για την ανίσωση (2) έχουμε:

$$3 - \frac{x+4}{2} < 0 \Leftrightarrow 6-(x+4) < 0 \Leftrightarrow 6-x-4 < 0 \Leftrightarrow -x < -2 \Leftrightarrow x > 2$$

Όπως φαίνονται στο επόμενο σχήμα, οι κοινές λύσεις των δυο ανισώσεων είναι όλοι οι αριθμοί x με: $2 < x \le 1+\sqrt{3}$



δ) Οι αριθμοί α, β που είναι κοινές λύσεις των (1) και (2) περιέχονται στο διάστημα $\left(2, 1+\sqrt{3}\right]$.

Έτσι έχουμε: $2 < \alpha \le 1+\sqrt{3}$, οπότε $6 < 3\alpha \le 3\left(1+\sqrt{3}\right)$, (3).

Ανάλογα, $2 < \beta \le 1+\sqrt{3}$, οπότε $8 < 4\beta \le 4\left(1+\sqrt{3}\right)$, (4).

Με πρόσθεση των ανισοτήτων (3), (4) παίρνουμε $14 < 3\alpha + 4\beta \le 7\left(1+\sqrt{3}\right)$ απ' όπου συνεπάγεται ότι:

$$2 < \frac{3\alpha+4\beta}{7} \le 1+\sqrt{3}$$

Από την τελευταία συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση των (1) και (2), που είναι το ζητούμενο.