

ΛΥΣΗ

α) Από τη γραφική παράσταση της f , φαίνεται ότι $f(0) = 3$ άρα $a \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + \gamma = 3$ οπότε $\gamma = 3$.

β) Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ και τα σημεία A και B έχουν την ίδια τεταγμένη, θα είναι και αυτά συμμετρικά ως προς τον $y'y$. Άρα:

$$a^2 - 3 = -(5 - 3a) \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0$ και οι ρίζες της:

$$a_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Επειδή το σημείο A ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο πρέπει:

$$a^2 - 3 < 0.$$

Για $a = 2$ είναι $2^2 - 3 = 1 > 0$ άρα η λύση $a = 2$ απορρίπτεται.

Για $a = 1$ είναι $1^2 - 3 = -2 < 0$ άρα η λύση $a = 1$ είναι δεκτή.

Οπότε, ο τύπος της f είναι:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 3.$$

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ η οποία για $x^2 = w > 0$ γίνεται $w^2 - 4w + 3 = 0$.

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ και οι ρίζες

$$w = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3 \text{ ή } w = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1,$$

οι οποίες είναι και οι δύο δεκτές. Άρα:

$$x^2 = 1 \Leftrightarrow \{x = 1 \text{ ή } x = -1\}, \text{ ή } x^2 = 3 \Leftrightarrow \{x = \sqrt{3} \text{ ή } x = -\sqrt{3}\}.$$

δ) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ όταν:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \text{ ή } 1 < x < \sqrt{3}.$$