ΛΥΣΗ

α) Αφού τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του $1^{ου}$ και του $3^{ου}$ τεταρτημόριου θα ισχύει $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$.

β) Η κλίση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία A , B δίνεται από τη σχέση:

$$\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A},$$

η οποία για τα $x_B = y_A$ και $y_B = x_A$, όπως προκύπτει από το ερώτημα α) γίνεται:

$$\alpha = \frac{x_A - y_A}{y_A - x_A} = -1.$$

γ)

i. Από τη σχέση $y_A = x_B$ για $y_A = \kappa^2 - 3\kappa + 1$ και $x_B = \kappa - 2$, έχουμε:

$$\kappa^2 - 3\kappa + 1 = \kappa - 2 \Leftrightarrow$$
$$\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0.$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 4 > 0$ οπότε έχει δύο άνισες ρίζες:

$$\kappa_1 = \frac{4-2}{2} = 1 \text{ και } \kappa_2 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Επειδή τα σημεία A και B ανήκουν στο $1^ο$ τεταρτημόριο πρέπει $y_A > 0$ και $x_B > 0$.

Για $\kappa_1 = 1$ έχουμε $y_A = x_B = -1 < 0$, απορρίπτεται.

Για $\kappa_2 = 3$ έχουμε $y_A = x_B = 1 > 0$, δεκτή.

Άρα $\kappa = 3$.

Οπότε, τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4,1)$ και $(1,4)$ αντίστοιχα.

ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και κλίση $\alpha = -1$, άρα

$$y = -x + \beta.$$

Επειδή διέρχεται από το σημείο A που για $\kappa = 3$ έχει συντεταγμένες $(4,1)$, θα ισχύει:

$$1 = -4 + \beta \Leftrightarrow \beta = 5.$$

Άρα η εξίσωση της ε είναι η $y = -x + 5$.