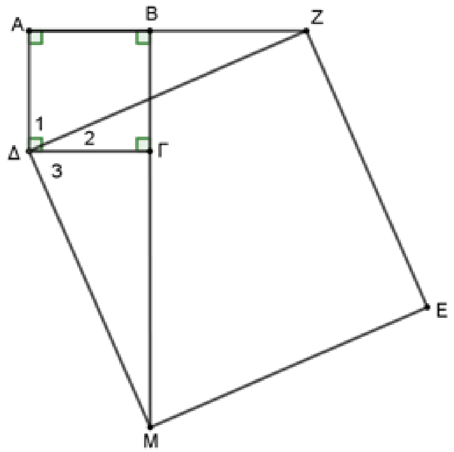
ΛΥΣΗ

α) Για τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ έχουμε:

- ΑΔ = ΔΓ, ως πλευρές του τετραγώνου ΑΒΓΔ
- ΑΖ = ΓΜ, από τα δεδομένα

Άρα έχουν μία προς μία ίσες τις κάθετες πλευρές τους, οπότε είναι ίσα.

β)



Για να είναι το τετράπλευρο ΔΜΕΖ τετράγωνο, γνωρίζοντας ότι είναι παραλληλόγραμμο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

Έχουμε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3$ διότι βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΓΜ των ίσων τριγώνων ΑΔΖ και ΓΔΜ.

Άρα $M\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90°$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΔΜΕΖ είναι και Ορθογώνιο διότι έχει μία ορθή γωνία.

Επειδή τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΓΔΜ είναι ίσα θα έχουν και τις υποτείνουσες αντίστοιχα ίσες, οπότε ΔΖ = ΔΜ. Άρα το ορθογώνιο ΔΜΕΖ είναι και ρόμβος, διότι έχει δύο διαδοχικές πλευρές είναι ίσες. Άρα είναι τετράγωνο.

γ) Για να είναι το τετράπλευρο ΒΖΕΜ εγγράψιμο αρκεί να αποδείξουμε ότι οι απέναντι γωνίες του ΖΒΜ και ΖΕΜ είναι παραπληρωματικές, δηλαδή

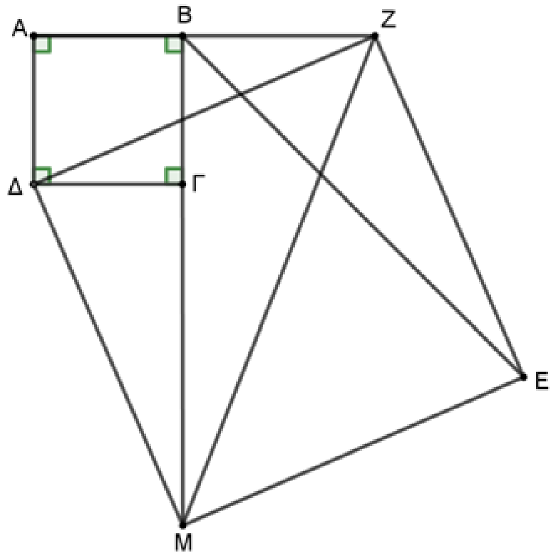
$Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 180°$.

Από το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχουμε $A\hat{B}\Gamma = 90°$ άρα και $Z\hat{B}M = 90°$ ως παραπληρωματική.

Από το τετράγωνο ΔΜΕΖ έχουμε $Z\hat{E}M = 90°$.

Άρα $Z\hat{B}M + Z\hat{E}M = 90° + 90° = 180°$.

δ)



Επειδή το τετράπλευρο ΒΖΕΜ είναι εγγράψιμο η πλευρά ΒΖ φαίνεται από τις απέναντι κορυφές του Μ και Ε υπό ίσες γωνίες, δηλαδή $B\widehat{M}Z = B\widehat{E}Z$.