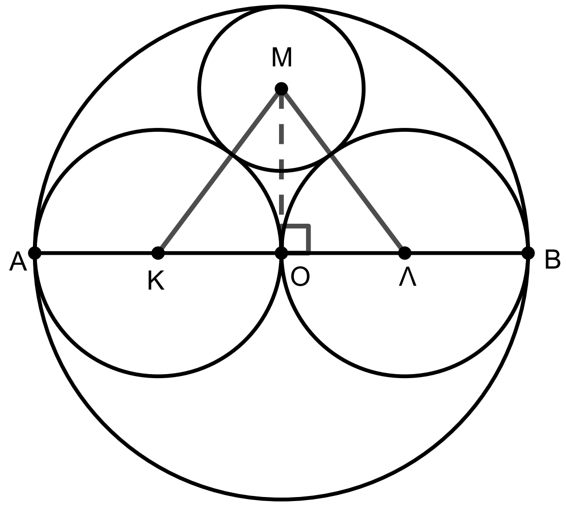
ΛΥΣΗ



α) 1 $\rightarrow$ ii., 2 $\rightarrow$ iii. , 3 $\rightarrow$ iv.

Δηλαδή ΚΛ=2R γιατί οι κύκλοι κέντρων Κ και Λ εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους. Ομοίως ΛΜ= R+ρ γιατί οι κύκλοι κέντρων Λ και Μ εφάπτονται εξωτερικά. Τέλος ΟΜ=2R-ρ γιατί ο κύκλος κέντρου Ο με τον κύκλο κέντρου Μ εφάπτονται εσωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με τη διαφορά των ακτινών τους.

β)

i. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Μ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά, οπότε η διάκεντρός τους θα ισούται με το άθροισμα των ακτινών τους, δηλαδή ΚΜ = R+ρ = ΛΜ από το ερώτημα α). Άρα το τρίγωνο ΜΚΛ έχει δύο πλευρές ίσες, οπότε είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΚΛ. Το σημείο Ο είναι το μέσο του τμήματος ΚΛ γιατί ΟΚ=ΟΛ=R, επομένως το τμήμα ΜΟ είναι διάμεσος της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου, άρα είναι και ύψος, δηλαδή $ΟΜ \perp ΚΛ$.

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΜΛ με $\widehat{O} = 90^o$ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε: $OM^2 + OΛ^2 = ΛM^2$

$(2R\text{-}ρ)^2 + R^2 = (R+ρ)^2$

$4R^2 - 4Rρ + ρ^2 + R^2 = R^2 + 2Rρ + ρ^2$

$4R^2 = 6Rρ$

$2R = 3ρ$

$ρ = \frac{2R}{3}$.