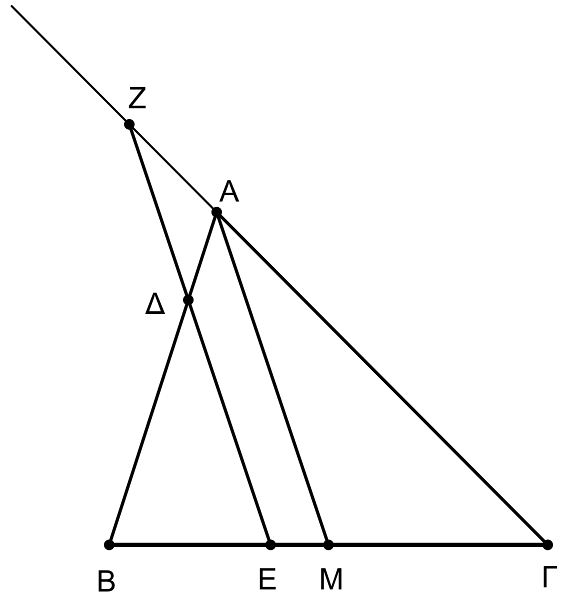
ΛΥΣΗ



α)

i. Οι πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΕΔ ανήκουν στις πλευρές ΒΜ και ΒΑ αντίστοιχα, του τριγώνου ΒΜΑ και επιπλέον η τρίτη του πλευρά ΔΕ είναι παράλληλη στην τρίτη πλευρά ΑΜ του τριγώνου ΒΜΑ. Οπότε οι πλευρές του τριγώνου ΒΕΔ είναι ανάλογες προς τις πλευρές του τριγώνου ΒΜΑ.

   Δηλαδή ισχύει: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM} = \frac{B\Delta}{BA}$ (1).

ii. Ομοίως οι πλευρές ΓΖ και ΓΕ του τριγώνου ΓΖΕ βρίσκονται στους φορείς των πλευρών ΓΑ και ΓΜ του τριγώνου ΓΑΜ και οι τρίτες τους πλευρές ΕΖ και ΑΜ είναι παράλληλες. Οπότε τα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, δηλαδή ισχύει: $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M} = \frac{\Gamma Z}{\Gamma A}$ (2).

β) Από τις σχέσεις (1) και (2) του α) ερωτήματος έχουμε ότι $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{\Gamma M}$**.** Επειδή το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τα τμήματα ΒΜ και ΓΜ είναι ίσα, οπότε οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται: $\frac{\Delta E}{AM} = \frac{BE}{BM}$ και $\frac{EZ}{AM} = \frac{\Gamma E}{BM}$**.** Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$\frac{\Delta E}{AM} + \frac{EZ}{AM} = \frac{BE}{BM} + \frac{\Gamma E}{BM}$ ή $\frac{\Delta E+EZ}{AM} = \frac{BE+\Gamma E}{BM}$, δηλαδή $\frac{\Delta E+EZ}{AM} = \frac{B\Gamma}{BM} \Leftrightarrow \frac{\Delta E+EZ}{AM} = \frac{2\cdot BM}{BM} = 2$.

Άρα $\frac{\Delta E+EZ}{AM} = 2$ ή ΔΕ+ΕΖ=2ΑΜ για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.