ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α
Α1. Σχολ. Σελ. 112
Α2. Σχολ. Σελ. 25
Α3. α. Σ, β. Σ, γ. Σ, δ. Σ
Α4. α. Λ β. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$.

ΘΕΜΑ Β
Β1.
$f(x) = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x-1)^2 + 1$

Β2. $f'(x) = 2(x-1) > 0$ στο $(1, +\infty)$, συνεχής στο $[1, +\infty)$, άρα γν. αύξουσα στο $[1, +\infty)$ δηλ. 1 – 1 οπότε αντιστρέφεται.
Έστω $y = (x-1)^2 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = (x-1)^2 \overset{y\ge1, x\ge1}{\Longleftrightarrow} x - 1 = \sqrt{y-1} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{y-1}, y \ge 1$.
Οπότε $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}, x \ge 1$.

Β3. $g(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{x-1}, & x \ge 1 \\ e^{ax} - e + 1, & x < 1 \end{cases}$
Η g είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ και στο $(-\infty, 1)$ ως πράξεις συνεχών. Αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, θα είναι συνεχής και στο 1. Δηλ. $\lim_{x\to1^+} g(x) = \lim_{x\to1^-} g(x) = g(1)$
$\lim_{x\to1^+}(1 + \sqrt{x-1}) = \lim_{x\to1^-}(e^{ax} - e + 1) \Leftrightarrow e^{\alpha} = e \Leftrightarrow \alpha = 1$.

Β4. (i) $\lim_{x\to+\infty}(1 + x - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x-\sqrt{x^2-1})(1+x+\sqrt{x^2-1})}{1+x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^2 - \sqrt{x^2-1}^2}{1+x+\sqrt{x^2-1}} =$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{1+x+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{2}{2} = 1$.
(ii) $\lim_{x\to1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{e^x - e}{x-1} \overset{\frac{0}{0}\, D.LH}{\Longrightarrow} \lim_{x\to1^-} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} e^x = e$.
(iii) $\lim_{x\to1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$
Άρα αφού $\lim_{x\to1^+} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \notin \mathbb{R}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1.

ΘΕΜΑ Γ
Γ1. $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$
$f'(x) = 2^x ln2 + 2x - 2$
$f''(x) = 2^x (ln2)^2 + 2 > 0$
Άρα η f' θα γνησίως αύξουσα

Γ2. $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$. Παρατηρούμε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 0$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν άλλες ρίζες.

Έστω ότι είχε 3 ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1) = 0$.

Η f είναι συνεχής στο $[\rho_2, \rho_3]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_2, ρ_3) με $f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$, άρα από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_2 \in (\rho_2, \rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2) = 0$.

Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, άρα από Θεώρημα Rolle θα υπήρχε ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$. Το οποίο είναι άτοπο από το ερ. **Γ1.**

Γ3.
Η f' είναι συνεχής στο $[0, 1]$
$f'(0) = ln2 - 2 < 0$
$f'(1) = ln2 > 0$
Άρα από το Θ. Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1): f'(x_0) = 0$. Αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα, θα είναι μοναδικό.
Αν $x < x_0 \xLeftrightarrow{f'\, γν.αύξουσα} f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < 0$
Αν $x > x_0 \xLeftrightarrow{f'\, γν.αύξουσα} f'(x) > f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) > 0$
Είναι και συνεχής στο x_0, άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0.

Γ4.
Θέτω $F(x) = f(x+1) - f(x)$

$$F'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

$x < x + 1 \xLeftrightarrow{f'\, γν.αύξουσα} f'(x) < f'(x+1) \Leftrightarrow F'(x) > 0 \Leftrightarrow F$ γνησίως αύξουσα.

$f(x^4+2) - f(x^4+1) > f(x^2+4) - f(x^2+3) \Leftrightarrow F(x^4+1) > F(x^2+3)$
$\xLeftrightarrow{F\, γν.αύξουσα} x^4 + 1 > x^2 + 3 \Leftrightarrow x^4 - x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow x > \sqrt{2}$ ή $x < -\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. $2f'(x)f(x) = 4x^3 + 12x^2 + 16x + 8 \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 4(x+1)(x^2+2x+2)$
$\Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2(2x+2)(x^2+2x+2) \Leftrightarrow 2f'(x)f(x) = 2(x^2+2x+2)'(x^2+2x+2)$
$\Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)' = ((x^2+2x+2)^2)' \Leftrightarrow f^2(x) = (x^2+2x+2)^2 + c$
$f^2(0) = 4 + c \xRightarrow{f(0)=2} c = 0$

$f^2(x) = (x^2+2x+2)^2 \Leftrightarrow |f(x)| = |x^2+2x+2|$
$x^2 + 2x + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
$|f(x)| = x^2 + 2x + 2 > 0$
$f(x) \neq 0$ και συνεχής (ως παραγωγίσιμη), άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.
$f(0) = 2 > 0$, οπότε $f(x) > 0$
Άρα $f(x) = x^2 + 2x + 2$

Δ2. $f'(x) = 2x + 2$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$
$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -1$
$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < -1$
Η f είναι συνεχής στο -1, άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ γν. αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, και παρουσιάζει ελάχιστο το $f(-1) = 1$.

Δ3. $f(x) - 1 + \left|ln|x|\right| = 0$ (1)
Η f παρουσιάζει ελάχιστο το ένα, άρα $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 \geq 0$. Η ισότητα ισχύει για $x = -1$. (2)
$\left|ln|x|\right| \geq 0$. Η ισότητα ισχύει για $ln|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (3)
(1), (2), (3) $\Rightarrow x = -1$.

Δ4. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0$

Έστω $\varphi(x) = f(x) - g(x)$
$\varphi(x) \leq \varphi(0)$
Η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0, το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$, και παρουσιάζει μέγιστο στο 0.
Από το Θ. Fermat $\varphi'(0) = 0$
$g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow g'(0) = 2$
Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y - g(0) = g'(0)x \Leftrightarrow y = 2x + 2$

Δ5. $2x < g(x) - 2 < xg'(x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2 < \frac{g(x)-g(0)}{x} < g'(x)$
Θ.Μ.Τ στο $[0, x]$.
g συνεχής στο $[0, x]$, παραγωγίσιμη στο (0, x), άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον
$\xi \in (0, x)$: $g'(\xi) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0}$
$0 < \xi < x \xLeftrightarrow{g'\gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha} g'(0) < g'(\xi) < g'(x) \Leftrightarrow 2 < \frac{g(x)-g(0)}{x} < g'(x)$

ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ