

ΑΡΧΗ 1^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ
ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΟΜΑΔΑ Α

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , και ισχύει:

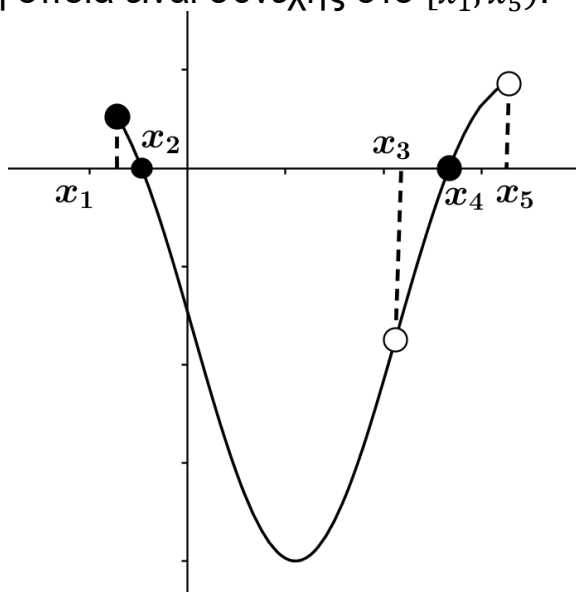
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 7

A2. Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. Να ορίσετε τη σύνθεση της f με τη g , δηλαδή την $g \circ f$.

Μονάδες 5

A3. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f , η οποία είναι συνεχής στο $[x_1, x_5]$.



ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 2^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν με ένα «Σ» αν η πρόταση είναι σωστή ή με ένα «Λ» αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α. Στο x_1 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.
β. Στο διάστημα $[x_2, x_4]$, η f είναι γνησίως φθίνουσα.
γ. Το x_3 είναι κρίσιμο σημείο.
δ. Στο x_4 ο ρυθμός μεταβολής της f είναι μηδέν.

Μονάδες 8

- A4.** Δίνεται ο παρακάτω ισχυρισμός:
«Αν μία συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, τότε θα παρουσιάζει και ολικό μέγιστο»
α. Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως αληθή ή ψευδή. (1 μονάδα)
β. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (4 μονάδες)

Μονάδες 5**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

- B1.** Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση στη μορφή
$$f(x) = (x - p)^2 + q, \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 4

Αν $p = q = 1$,

- B2.** Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να δείξετε ότι
$$f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1} + 1, \quad x \geq 1.$$

Μονάδες 8

- B3.** Έστω g μία συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε:

$$g(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & x \geq 1 \\ e^{ax} - e + 1, & x < 1 \end{cases}$$

- α. Να δείξετε ότι $a=1$.

Μονάδες 4

- β. Να υπολογίσετε τα όρια:

ΑΡΧΗ 3^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - g(x^2)).$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$

Τι διαπιστώνετε για την παραγωγισιμότητα της g στο 1;

Μονάδες 9**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x' σε δύο ακριβώς σημεία, τα $A(1, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να δείξετε ότι η f πατρουσιάζει μοναδικό ελάχιστο στο $x_0 \in (0, 1)$.

Μονάδες 7

Γ4. Να λυθεί η ανίσωση $f(x^4 + 2) + f(x^2 + 3) > f(x^4 + 1) + f(x^2 + 4)$.

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα παρακάτω:

- $f(0) = g(0) = 2$,
- $\frac{1}{2}f'(x)f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$,
- η g' είναι γνησίως αύξουσα και
- η γραφική παράσταση της f δε βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g .

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x^2 + 2x + 2$.

Μονάδες 6

ΑΡΧΗ 4^{ΗΣ} ΣΕΛΙΔΑΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

- Δ2.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **Μονάδες 4**
- Δ3.** Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 - |\ln|x||$. **Μονάδες 5**
- Δ4.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $A(0, 2)$. **Μονάδες 5**
- Δ5.** Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$, ισχύει: $f'(x) < g(x) < xg'(x) + 2$. **Μονάδες 5**

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΝΑ ΕΧΕΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΜΠΟΤΣΗΣ ΓΙΑΝΝΗΣ