



Τομέας Μαθηματικών

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ  
ΣΠΟΥΔΩΝ Γ' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

## Θέμα Α

**A1.** Να δειχθεί ότι η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x^{-\nu}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}^*$  με  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι

$$f'(x) = -\nu x^{-\nu-1}.$$

7 Μονάδες

**A2.** Δίνεται η πρόταση: « Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|}$ . Υπάρχει το όριο της  $f$  στο 0 και είναι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ».

**A2.1.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

1 Μονάδα

**A2.2.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (A2.1).

3 Μονάδες

**A3.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη;

4 Μονάδες

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο νούμερο που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Είναι  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} + h\right) - \eta\mu\frac{\pi}{6}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

2. Η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 3x - 2022$  έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

3. Αν  $\int_a^b f(x) dx = 0$  και η  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο  $[a, b]$  τότε υπάρχει υποσύνολο του  $[a, b]$  στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Bolzano.

4. Είναι  $\int_{-1}^1 (x^{2021} + x^{2019} + x^{2017} + \dots + x) dx = 0$ .

5. Αν  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = e^{-x}$  τότε  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$  με  $x \in \mathbb{R}^*$ .

5x 2 = 10 Μονάδες

### Θέμα Β

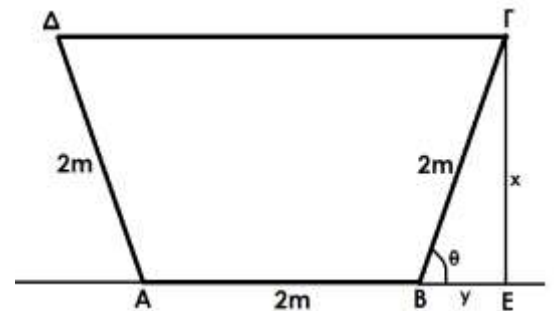
Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα με  $AB = BG = AD = 2m$ ,  $x = GE$ ,  $y = BE$  και  $\theta$  την γωνία  $\widehat{GBE}$  σε rad με  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

**B1.** Να αποδειχθεί ότι  $x(\theta) = 2\eta\mu\theta$  και  $y(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$  και κατόπιν να βρεθούν τα όρια

i)  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x(\theta)}{y(\theta)}$

ii)  $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{\theta} - \frac{2}{x(\theta)} \right)$

4 Μονάδες



**B2.** Να δείξετε ότι υπάρχει  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  τέτοιο ώστε  $x(\theta) + y(\theta) = \theta^2 + 1$ .

4 Μονάδες

**B3.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τραπέζιου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο  $E(\theta) = 4\eta\mu\theta(1 + \sigma\upsilon\nu\theta)$ ,  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

5 Μονάδες

**B4.** Για ποια τιμή του  $\theta$  το εμβαδόν του τραπέζιου μεγιστοποιείται και ποια η μέγιστη τιμή του.

6 Μονάδες

**B5.** Να βρεθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} E(\theta) d\theta$ .

6 Μονάδες

## Θέμα Γ

**Γ1.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2022}}$  και  $F(x)$  μια αρχική της με  $F(1)=0$ .

α. Να δείξετε ότι η  $F$  είναι γνησίως αύξουσα.

3 Μονάδες

β. Να βρείτε το πρόσημο της  $F$ .

3 Μονάδες

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την  $C_f$  τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = 0$  και  $x = 1$ .

5 Μονάδες

**Γ2.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1) = -4$ , και για την οποία ισχύει η σχέση:

$$x \cdot f'(x) = 2f(x) + 5 \int_1^x f(t) dt \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

**α)** Να δειχθεί ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = 6x^2 - 10$  με  $x > 0$ .

8 Μονάδες

**β)** Να υπολογιστεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v}$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$  για τις διάφορες τιμές του  $v$ .

6 Μονάδες

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^x, & x > 0 \\ \lambda, & x = 0 \end{cases}$ .

**Δ1.** Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

3 μονάδες

**Δ2.** Αν  $\lambda=1$  τότε:

- i. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και να δειχθεί ότι η  $f$  είναι κυρτή.

5 μονάδες

- ii. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:  $x^x \cdot e^{-x} = k$ ,  $x > 0$  για τις διάφορες τιμές του **θετικού** αριθμού  $k$ .

6 μονάδες

iii. Να δειχθεί ότι  $\int_1^e \ln x \cdot f(x) dx = \frac{e-1}{e}$ .

5 μονάδες

- iv. Να δειχθεί ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (e^{-1}, e)$  τέτοια ώστε να ισχύει:

$$f(\xi_1) \cdot \ln \xi_1 + e \cdot f(\xi_2) \cdot \ln \xi_2 = \frac{e - e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}.$$

6 Μονάδες