νέα παιδεία
ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ

Τομέας Μαθηματικών

Τομέας Μαθηματικών

Ενδεικτικές απαντήσεις στο διαγώνισμα προσομοίωσης

Θέμα Α

Α1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

Α2.

Α2.1. Ψ.

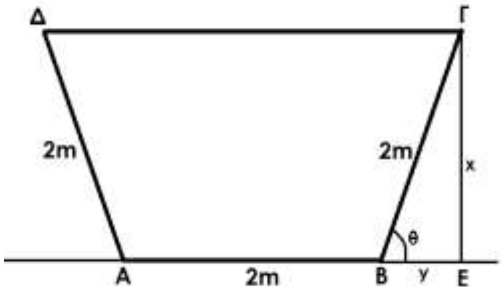
Α2.2. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup(1,+\infty)$. Επειδή δεν ορίζεται κοντά στο 0 το όριο δεν έχει νόημα.

Α3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f′ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α4. 1.Σ. 2.Λ. 3.Σ 4.Σ 5.Λ

Θέμα Β

Β1. Για $\theta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΕ ισχύει



$\eta\mu\theta = \frac{\Gamma E}{B\Gamma} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\eta\mu\theta$ άρα $x(\theta) = 2\eta\mu\theta$

ομοίως $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{BE}{B\Gamma} = \frac{y}{2} \Leftrightarrow y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ άρα $y(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$

Για θ = 0 είναι x(0) = 0 και y(0) = 2. Τελικά για $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $x(\theta) = 2\eta\mu\theta$ και $y(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$.

i) $\lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x(\theta)}{y(\theta)} = \lim\limits_{\theta \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} = +\infty$

ii) $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{2}{x(\theta)}\right)=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1}{\eta\mu\theta}\right)=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{\eta\mu\theta-\theta}{\theta\eta\mu\theta}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\eta\mu\theta+\theta\sigma\upsilon\nu\theta}\underset{DLH}{\overset{0/0}{=}}\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{-\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\theta\eta\mu\theta}=0$

B2. Είναι $x(\theta)+y(\theta)=\theta^2+1\Leftrightarrow 2\eta\mu\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-\theta^2-1=0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\theta)=2\eta\mu\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta-\theta^2-1,\ \theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών και f(0)=1>0 και $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{4-\pi^2}{4}<0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\theta_o\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(\theta_o)=0\Leftrightarrow f(\theta_o)=0\Leftrightarrow x(\theta_o)+y(\theta_o)=\theta_o^2+1$.

B3. $E(\theta)=\dfrac{AB+\Gamma\Delta}{2}\cdot\Gamma E=\dfrac{2+2+2y}{2}\cdot x=(2+y)x=$

$=(2+2\sigma\upsilon\nu\theta)2\eta\mu\theta=4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)$

Άρα $E(\theta)=4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta),\ \theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

B4. Η E(θ) είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$E'(\theta)=4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)=4\sigma\upsilon\nu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)+4\eta\mu\theta(-\eta\mu\theta)=$

$=4\sigma\upsilon\nu\theta+4\sigma\upsilon\nu^2\theta-4\eta\mu^2\theta=4\sigma\upsilon\nu\theta+4\sigma\upsilon\nu^2\theta-4+4\sigma\upsilon\nu^2\theta=$

$=8\sigma\upsilon\nu^2\theta+4\sigma\upsilon\nu\theta-4=4\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1\right)=$

$4(\sigma\upsilon\nu\theta+1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\dfrac{1}{2}\right)$

$E'(\theta)>0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta>\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\theta<\dfrac{\pi}{3}$

Επομένως έχουμε τον πίνακα:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
f'(x)		+	0	−	
f(x)	0	↗	$3\sqrt{3}$	↘	4

Άρα η Ε(θ) παρουσιάζει μέγιστο για $\theta = \frac{\pi}{3}$ με

$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$.

Β5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} E(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\, d\theta \underset{-\eta\mu\theta d\theta = du}{\overset{\sigma\upsilon\nu\theta = u}{=}}$$

$$= -\int_1^{\frac{1}{2}} 4(1+u)\, du = -4\left[u+\frac{u^2}{2}\right]_1^{\frac{1}{2}} = -4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}-1-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

Θέμα Γ

Γ1. α. F παραγωγίσιμη ως αρχική της f με $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2022}} > 0$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα.

β. Αφού F(1) = 0. Για x > 1 έχω F(x) > F(1) = 0, για x < 1 έχω F(x)<F(1)=0.

γ.

$$E = \int_0^1 |F(x)|dx = -\int_0^1 (x)' F(x)dx = -[xF(x)]_0^1 + \int_0^1 xF'(x)dx =$$

$$= -1\cdot F(1) + 0\cdot F(0) + \int_0^1 xf(x)dx = 0 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+2022}}dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{(x^2+2022)'}{2\sqrt{x^2+2022}}dx = \left[\sqrt{x^2+2022}\right]_0^1 = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$$

5 Μονάδες

Γ2α.

$$x\cdot f'(x)=2f(x)+5\int_1^2 f(t)dt \Leftrightarrow x^2\cdot f'(x)=2xf(x)+5x\int_1^2 f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$x^2\cdot f'(x)-2xf(x)=5x\int_1^2 f(t)dt \Leftrightarrow \frac{x^2\cdot f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\frac{5}{x^3}\int_1^2 f(t)dt \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'=\left(-\frac{5}{2x^2}\int_1^2 f(t)dt\right)' \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x^2}=-\frac{5}{2x^2}\int_1^2 f(t)dt+c \Leftrightarrow$$

$$f(x)=cx^2-\frac{5}{2}\int_1^2 f(t)dt \quad (1)$$

Ολοκληρώνοντας την (1) έχουμε

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(cx^2-\frac{5}{2}\int_1^2 f(t)dt\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(cx^2)dx+\int_1^2\left(-\frac{5}{2}\int_1^2 f(t)dt\right)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x)dx=c\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-\frac{5}{2}\int_1^2 f(t)dt\cdot\int_1^2 dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{7c}{3}-\frac{5}{2}\int_1^2 f(t)dt\cdot 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{7}{2}\int_1^2 f(x)dx=\frac{7c}{3} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{2c}{3} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $f(x)=cx^2-\frac{5c}{3}$ και για x = 1 :

$$f(1)=c-\frac{5c}{3} \Leftrightarrow -4=-\frac{2c}{3} \Leftrightarrow c=6$$

Τελικά $f(x)=6x^2-10$ με $x>0$.

Γ2β) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-10}{x^\nu}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-10}{x}=+\infty, & \alpha\nu\ \nu=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-10}{x^2}=6, & \alpha\nu\ \nu=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2-10}{x^\nu}=0, & \alpha\nu\ \nu>2\end{cases}$$

Θέμα Δ

Δ1. Η δοθείσα συνάρτηση μετασχηματίζεται στην : $f(x)=\begin{cases} e^{x\ell nx-x}, & x>0 \\ \lambda, & x=0 \end{cases}$.

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση στο $x_0=0$ θα πρέπει να ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x\ell nx-x}\right)=\lambda$.

Όμως, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ell nx-x}=e^0=1$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ell nx)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ell nx}{\frac{1}{x}}\overset{-\infty/+\infty}{\underset{DLH}{=}}0$

Οπότε, προκύπτει ότι λ=1.

Δ2.

i. Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$f'(x)=\left(e^{x\ell nx-x}\right)'=e^{x\ell nx-x}(x\ell nx-x)'=f(x)(\ell nx+1-1)=f(x)\ell nx\ (1)$

επιλύοντας $f'(x)>0\Leftrightarrow f(x)\ell nx>0\overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow}\ell nx>0\Leftrightarrow x>1$

Επομένως, η f (όντας συνεχής στα διαστήματα $(0,1]$ και $[1,+\infty)$) είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ παρουσιάζοντας ελάχιστο στη θέση $x_0=1$ με ελάχιστη τιμή $f(1)=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ και τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1=0$ με τιμή $f(0)=1$.

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η f' είναι παραγωγίσιμη με

$f''(x)=\left(f(x)\ell nx\right)'=f'(x)\ell nx+f(x)\cdot\dfrac{1}{x}\overset{(1)}{=}f(x)\ell n^2x+f(x)\cdot\dfrac{1}{x}=f(x)\left(\ell n^2x+\dfrac{1}{x}\right)>0$

οπότε η f είναι κυρτή στο πεδίο ορισμού της.

ii. Για $x\in[0,+\infty)$ έχουμε : $x^xe^{-x}=\kappa\Leftrightarrow f(x)=\kappa$

Αφού, ισχύει:

- $f(0)=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ell nx-x}\overset{u=x\ell nx-x}{=}\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$,

  αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\ell nx-x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ell nx-1)=+\infty$ προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι :

$$f_A=\left[f(1),f(0)\right]\cup\left[f(1),\lim_{x\to\infty}f(x)\right)=\left[\frac{1}{e},1\right]\cup\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$$

Επομένως διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $k<\frac{1}{e}$ η εξίσωση $f(x)=k$ η είναι αδύνατη.

- Αν $k=\frac{1}{e}$ η εξίσωση $f(x)=k$ έχει ακριβώς μια λύση την $x_0=1$, για κάθε $x\in[0,1)\cup(1,+\infty)$, αφού $f(1)=\frac{1}{e}$ και $f(x)>\frac{1}{e}$.

- Αν $\frac{1}{e}<k<1$ η εξίσωση f(x)=k έχει ακριβώς δύο λύσεις μια λύση στο $[0,1)$ και μια λύση στο $(1,+\infty)$.

- Αν $k>1$ η εξίσωση f(x)=k έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$.

iii. Από την σχέση (1) προκύπτει :

$$\int_1^e \ell nx\cdot f(x)dx=\int_1^e f'(x)dx=\left[f(x)\right]_1^e=\left[e^{x\ell nx-x}\right]_1^e=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$$

iv. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\frac{1}{e},1\right]$ και $[1,e]$ με $f'(x)=f(x)\ell nx$ και ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ στα διαστήματα αυτά. Εφαρμόζοντας το θεώρημα προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και $\xi_2\in(1,e)$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{e}\right)}{1-\frac{1}{e}}\Leftrightarrow f(\xi_1)\ell n\xi_1=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{e}\right)}{1-\frac{1}{e}}\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{e}\right)f(\xi_1)\ell n\xi_1=f(1)-f\left(\frac{1}{e}\right)\ (A)$$

και

$$f'(\xi_2)=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}\Leftrightarrow f(\xi_2)\ell n\xi_2=\frac{f(e)-f(1)}{e-1}\Leftrightarrow(e-1)f(\xi_2)\ell n\xi_2=f(e)-f(1)\ (B)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις Α και Β κατά μέλη προκύπτει:

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΗΡΙΑ νέα παιδεία

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)f(\xi_1)\ell n\xi_1+(e-1)f(\xi_2)\ell n\xi_2=f(1)-f\left(\frac{1}{e}\right)+f(e)-f(1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{e}\right)f(\xi_1)\ell n\xi_1+(e-1)f(\xi_2)\ell n\xi_2=f(e)+f\left(\frac{1}{e}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{e}\right)f(\xi_1)\ell n\xi_1+(e-1)f(\xi_2)\ell n\xi_2=e^{e\ell ne-e}+e^{\frac{1}{e}\ell n\frac{1}{e}-\frac{1}{e}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{e}\right)f(\xi_1)\ell n\xi_1+(e-1)f(\xi_2)\ell n\xi_2=1-e^{-\frac{2}{e}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(e-1)f(\xi_1)\ell n\xi_1+e(e-1)f(\xi_2)\ell n\xi_2=e\cdot\left(1-e^{-\frac{2}{e}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\xi_1)\ell n\xi_1+ef(\xi_2)\ell n\xi_2=\frac{e-e^{1-\frac{2}{e}}}{(e-1)}=\frac{e-e^{\frac{e-2}{e}}}{e-1}$$