ΔΕΥΤΕΡΑ 06 – 06 – 2022

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΤΗΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ

Θέμα Α

Α1 Σελ. 186 (Σχ. Βιβλίο)

Α2 Σελ. 142 (Σχ. Βιβλίο)

Α3 Σελ. 161 (Σχ. Βιβλίο)

Α4 **α)** Σωστό

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

Θέμα Β

$f: (-\infty,\ 1] \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$g: [0,\ +\infty) \to \mathbb{R} \qquad g(x) = \sqrt{x}$

Β1. $D_{f\circ g} = \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

άρα $D_{f\circ g} = [0,\ 1] \neq \varnothing$ οπότε ορίζεται η σύνθεση

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^4(x) - 2g^2(x) + 1$

$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

με $D_{f\circ g} = [0,\ 1]$

Β2. $h(x) = x^2 - 2x + 1,\ x \in [0,\ 1]$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με

$h'(x) = 2x - 2 = 2(x-1) < 0$ στο $(0,\ 1)$ και h συνεχής στο $[0,\ 1)$ άρα h

γνήσια φθίνουσα οπότε h: $1-1$ στο $[0,\ 1]$

Η h είναι συνεχής και h $\downarrow$.

Το σύνολο τιμών της h είναι:

$h_{[0,1]} = [h(1),\ h(0)] = [0, 1]$

Εύρεση τύπου h^{-1}

$y = h(x)$

$y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = |x-1| \Leftrightarrow -(x-1) = \sqrt{y} \Leftrightarrow$

$-x + 1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow$

$x = 1 - \sqrt{y}$

$f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y},\ y \in [0,\ 1]$

Μετονομάζοντας $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x},\ x \in [0,\ 1]$

B3.

i. $\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,\ 1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,\ 1) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

Έλεγχος συνέχειας στο $[0,\ 1]$

$$\lim_{x\to 1^-}\varphi(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x\to 1^-}\frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \frac{1}{2}$$

και $\varphi(1) = \dfrac{1}{2}$

Άρα $\left.\begin{array}{l} \varphi(0) = 1 \\ \varphi(1) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \varphi(0) \neq \varphi(1)$

Επομένως ισχύουν οι συνθήκες του Θ.Ε.Τ.

ii. Θεωρούμε $\lambda(x) = \varphi(x) - \eta\mu\alpha$

• Η λ συνεχής στο $[0,\ 1]$ ως διαφορά συνεχών

• $\lambda(0) = \varphi(0) - \eta\mu\alpha = 1 - \eta\mu\alpha > 0$

$\lambda(1) = \varphi(1) - \eta\mu\alpha = \dfrac{1}{2} - \eta\mu\alpha < 0$

διότι $\dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

$\overset{\eta\mu\uparrow}{\Rightarrow} \eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6}\right) < \eta\mu\alpha < \eta\mu\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1$

$\dfrac{1}{2} - \eta\mu\alpha < 0$

Επομένως, ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano οπότε υπάρχει

$x_0 \in (0,\ 1)$ έτσι ώστε $\lambda(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$

Θέμα Γ

Γ1. Το $O(0,\ 0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$$

Για $x < -1$ $\quad f'(x) = -2,$

$$f'(x) = (-2x)' \text{ η f είναι συνεχής στο διάστημα } (-\infty,\ -1]$$

άρα από Συν. Θ.Μ.Τ

$f(x) = -2x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

Για $x > -1$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 1$

$f'(x) = (x^3 - x)'$ η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-1,\ +\infty)$

άρα από Συν. Θ.Μ.Τ.

$f(x) = x^3 - x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R} \quad (1)$

όμως $(0,\ 0) \in C_f \Leftrightarrow f(0) = 0$

$(1) \overset{x=0}{\leftrightarrow} f(0) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$

οπότε $f(x) = x^3 - x,\ x > -1$

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = -1$ πρέπει

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \to -1^-} (-2x + c_1) = \lim_{x \to -1^+} (x^3 - x) \Leftrightarrow 2 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Άρα $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x < -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$

Επίσης $f(-1) = \lim_{x \to -1^+} (x^3 - x) = 0$

άρα $f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$

Γ2. Για $x_0 > -1$ έχουμε $f(x) = x^3 - x$ παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική

$f'(x) = 3x^2 - 1$

Εξίσωση εφαπτομένης στο x_0

(ε): $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

όμως $A(0, -2) \in (\varepsilon) \Leftrightarrow -2 - f(x_0) = f'(x_0)(-x_0)$

$-2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0)$

$-2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0$

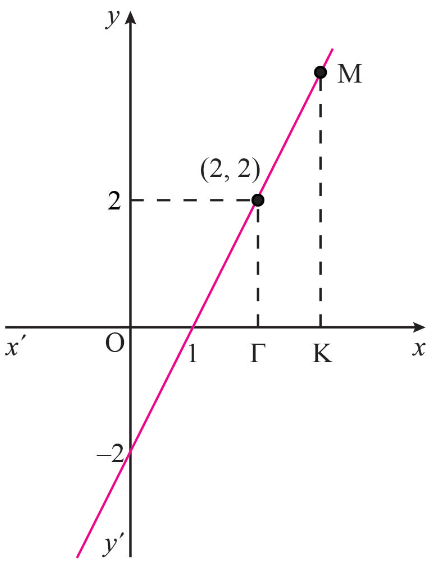
$2x_0^3 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1$

Άρα(ε): $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y - 0 = 2(x - 1)$

$y = 2x - 2$

Γ3.



Έστω $M(x,\ y)$ το σημείο της ευθείας με $x > 2$

Σύμφωνα με την εκφώνηση η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.

Οπότε $M(x(t),\ y(t))$ και $M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow M(x(t),\ 2x(t)-2)$

Από τα δεδομένα $K(x(t),\ 0)$

Επομένως, $E(t) = \frac{1}{2}(K\Gamma)\cdot(MK)$

$= \frac{1}{2}|x(t)-2|\cdot|y(t)|$

$\overset{x(t)>2>1}{=} \frac{1}{2}(x(t)-2)\cdot(2x(t)-2)$

$E(t) = (x(t)-2)(x(t)-1) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

Η $E(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2,\ +\infty)$ ως πολυωνυμική με

$E'(t) = 2x(t)\cdot x'(t) - 3x'(t)$

Την χρονική στιγμή $t = t_0$ γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ ταυτίζεται

με το $B(3,\ 4)$ άρα $x(t_0) = 3$.

Έχουμε $x'(t_0) = 2\mu./\sec$ οπότε $E'(t_0) = 2x(t_0)x'(t_0) - 3x'(t_0)$

$= 2\cdot 3\cdot 2 - 3\cdot 2$

$= 6\ \mu./\sec$

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right) =$

Έχουμε $A = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{\kappa\to-\infty}\frac{\eta\mu\kappa}{\kappa} = \lim\limits_{\kappa\to-\infty}\left(\frac{1}{\kappa}\cdot\eta\mu\kappa\right)$

Θέτουμε $\kappa = f(x)$ οπότε

$x \to -\infty$, ο τύπος $f(x) = -2x - 2$ δίνει $\kappa \to +\infty$

$$\text{Όμως}, -1 \le \eta\mu\kappa \le 1 \underset{\kappa\to+\infty}{\overset{\frac{1}{\kappa}>0}{\Leftrightarrow}} -\frac{1}{\kappa} \le \frac{1}{\kappa}\eta\mu\kappa \le \frac{1}{\kappa}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\kappa\to+\infty} -\frac{1}{\kappa} = 0 \\ \lim_{\kappa\to+\infty} \frac{1}{\kappa} = 0 \end{aligned}\right\} \to A = 0 \quad (\text{Κριτήριο Παρεμβολής})$$

$$B = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(-x)}{1-x^3} \overset{\substack{\text{Θέτουμε } \lambda=-x \\ x\to-\infty,\ \lambda\to+\infty}}{=\!=\!=\!=} \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{f(\lambda)}{1-(-\lambda)^3} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^3-\lambda}{1+\lambda^3} = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^3}{\lambda^3} = 1$$

$$\text{Άρα} \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = A + B = 0 + 1 = 1$$

Θέμα Δ

Δ1 $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x - \ln(3x)$

Η f παραγωγίσιμη ως πράξεις παραλληλογράμμων μ.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Προκύπτει ο πίνακας μεταβολές της $f'(x)$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		↘		↗	

Η f συνεχής στο $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f_{(0,1]} = \left[f(1), \lim_{x\to0^+} f(x)\right) = \left[1 - \ln 3, +\infty\right)$$

$$\text{διότι} \lim_{x\to0^+}\ln(3x) \overset{\substack{\text{Θέτουμε } \kappa=3x \\ x\to0^+,\ \kappa\to0^+}}{=\!=\!=\!=} \lim_{\kappa\to0^+}\ln\kappa = -\infty$$

Επομένως, $0 \in f\left(0,1\right]$ οπότε υπάρχει $x_1 \in \left(0,\ 1\right)$ ώστε $f\left(x_1\right) = 0$ και είναι μοναδικό αφού η f: γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\ 1\right]$

Η f συνεχής $\left[1,\ +\infty\right)$ και γνησίως αύξουσα άρα

$f_{\left[1,\ +\infty\right)} = \left[f\left(1\right),\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[1 - \ln 3,\ +\infty\right)$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \ln\left(3x\right)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln\left(3x\right)}{x}\right) = +\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(3x\right)}{x} \overset{dLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$. (διότι είναι $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ α. μορφή)

Επομένως, $0 \in f_{\left[1,\ +\infty\right)}$ οπότε υπάρχει $x_2 \in \left(1,\ +\infty\right)$ ώστε $f\left(x_2\right) = 0$ και είναι μοναδικό αφού η f: γνησίως αύξουσα στο $\left[1,\ +\infty\right)$

Άρα, η f έχει 2 ακριβώς ρίζες $x_1,\ x_2$ με $x_1 < 1 < x_2$

ii. Η f παραγωγίσιμη ως διαφορά δύο παραγωγίσιμων με $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

Η f' παραγωγίσιμη ως διαφορά δύο παραγωγίσιμων

με $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0\ \ \forall\ \ x \in \left(0,\ +\infty\right)$

και f συνεχής στο $\left(0,\ +\infty\right)$ άρα f: κυρτή στο $\left(0,\ +\infty\right)$

Δ2 Η $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in \left[x_1,\ x_2\right]$ διότι $x_1 < x < 1$ και $f\downarrow$ τότε: $0 > f(x)$ όμοια για $1 < x < x_2$ και $f\uparrow$ τότε: $0 > f(x)$

$$E = \int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = -\int_{x_1}^{x_2}\left(x - \ln 3x\right)dx = \int_{x_1}^{x_2}\ln 3x - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}(x)'\ln 3x\,dx - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} = \left[x\ln 3x\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}dx - \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} =$$

$$= x_2\ln 3x_2 - x_1\ln 3x_1 - \left(x_2 - x_1\right) + \frac{\left(x_1 - x_2\right)\left(x_1 + x_2\right)}{2} =$$

$$= x_2^2 - x_1^2 - \left(x_2 - x_1\right) - \frac{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_1 + x_2\right)}{2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - \left(x_1 - x_2\right)$$

$$= \left(x_2 - x_1\right)\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)\left(x_1 + x_2 - 2\right)$$

Δ3 Γνωρίζουμε ότι $E > 0$ άρα $x_1 + x_2 - 2 > 0$ διότι $x_2 - x_1 > 0$, αφού $x_1 < x_2$

άρα $x_1 + x_2 > 2 \Leftrightarrow x_2 > 2 - x_1$

Επίσης $x_1 < 1 < x_2$

$-x_1 > -1$

$2 - x_1 > 1$

οπότε $1 < 2 - x_1 < x_2$

Η $f \uparrow$ στο $[1, +\infty)$ οπότε $f(2 - x_1) < f(x_2)$ ή

$f(2 - x_1) < 0$

Δ4 Θεωρούμε $h(x) = 2f(x) + \ln 3 - 1 - f'(x_2)(x - x_2)$

$D_h = D_f = (0, +\infty)$

Η εφ της C_f στο $x = x_2$

$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$

$y = f'(x_2)(x - x_2)$

Αφού η f: κυρτή

$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (1) με την "=" μόνο για $x = x_2$

Επίσης $f(x) \geq f(1)$ (2) αφού $x = 1$ Θ. ολ. ελάχ.

(1) + (2): $2f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(1)$

όμως η "=" στην (1) ισχύει για $x = x_2$

και η "=" στην (2) ισχύει για $x = 1$.

Επιπλέον $x_2 \neq 1$

άρα $2f(x) > f'(x_2)(x - x_2) + 1 - \ln 3$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη

στο $(0, +\infty)$

Επιμέλεια απαντήσεων των θεμάτων: Τομέας Μαθηματικών

<u>Αξιολόγηση θεμάτων</u>

Τα θέματα χαρακτηρίζονται ως ποιοτικά, σωστά δομημένα, διατυπωμένα με σαφήνεια, καλύπτουν σχεδόν όλη την ύλη.