ΛΥΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΡΙΝΗ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 111

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α3. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. f(1)=1ln1+2-3=-1<0

f(e)=elne+2e-3=3e-3>0 , άρα f(1)f(e)<0 και η f είναι συνεχής στο [1,e] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων , οπότε από Θ.bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της f(x)=0 στο (1,e)

Β2. Για κάθε $x_1,x_2 \epsilon [1,+\infty)$ με $\boldsymbol{x_1<x_2}$ έχουμε $lnx_1<lnx_2$ και $x_1<x_2$ οπότε $\boldsymbol{x_1 lnx_1<x_2 lnx_2}$ και $\boldsymbol{2x_1-3<2x_2-3}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $f(x_1)<f(x_2)$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο [1,+∞)

f(A)=[f(1) , $\lim_{x\to+\infty} f(x)$)=[-1,+∞) αφού $\lim_{\chi\to+\infty} lnx$=+∞ οπότε $\lim_{x\to+\infty} f(x)$=+∞

Β3. Η f είναι συνεχής στο Α=[1,+∞) , το 2023ϵ f(A)= [-1,+∞) και f γνησίως αύξουσα στο [1,+∞) οπότε η εξίσωση f(x)=2023 έχει μοναδική ρίζα στο [1,+∞)

Β4. η (ε) : y=4x-e-3 εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f αν και μόνο αν υπάρχει $\chi_0 \epsilon [1,+\infty)$ ώστε να ισχύουν

$$\begin{cases} f'(x_0) = 4 \\ f(x_0) = 4x_0 - e - 3 \end{cases}$$

f′(x)=lnx+3

$f'(x_0)=4 \Leftrightarrow lnx_0+3=4 \Leftrightarrow lnx_0=1=lne \Leftrightarrow x=e$

f(e)=4e-e-3⇔elne+2e-3=3e-3⇔e+2e-3=3e-3 ⇔3e-3=3e-3

άρα η (ε) : y=4x-e-3 εφάπτεται στην Cf.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.Έχουμε ότι:$f^2(x) - 1=-2xf(x) \Leftrightarrow f^2(x)+2xf(x) + x^2=1 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2=x^2+1$ (1)

Θέτουμε $g(x)=f(x) +x$, με $x \in \mathbb{R}$,οπότε:$(g(x))^2=x^2+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (2)

Έχουμε: $g(x)=0 \Leftrightarrow (g(x))^2=0 \Leftrightarrow x^2+1=0$, αδύνατο.

Άρα, $g(x)\neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και g συνεχής στο $\mathbb{R}$.Οπότε,η g διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $g(0)=f(0)=1>0$ ισχύει ότι: $g(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε,$\sqrt{g^2(x)} = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow |g(x)| = \sqrt{x^2+1} \overset{g(x)>0}{\Longleftrightarrow} g(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$,για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε ότι: $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} > |x| \geq x$

Άρα,$\sqrt{x^2+1} - x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3.Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Οπότε,για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$(x^2+1)f''(x)+\frac{f'(x)}{f(x)} = (x^2+1)\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0.$$

Γ4.Θέτουμε $u=f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

$$u_0= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1} - x)= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1}+ x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x} =$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

Άρα,$\lim_{x\to+\infty} \eta\mu(f(x)) = \lim_{u\to 0} \eta\mu u=0$.

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$.Οπότε, θα είναι συνεχής και στο 1.Επομένως, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$.

Θέτουμε g(x)=$\frac{f(x)-2x}{x-1}$κοντά στο 1,με $\lim_{x\to 1} g(x) = 1$.

Επίσης κοντά στο 1 έχουμε:f(x)=(x-1)g(x)+2x.

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}$[(x-1)g(x)+2x]=0$\cdot 1 + 2 = 2$.Άρα και f(1)=2.

Δ2.Έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)g(x)+2x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}[g(x)+2] = 3$.Άρα, f`(1)=3.

Η εφαπτομένη της C_f στο A(1,f(1)) έχει εξίσωση: y-f(1)=f`(1)(x-1)⇔

y-2=3(x-1)⇔

y=3x-1.

Δ3.Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=2x_o-1$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)=f(x)-2x+1, x∈[1,3].

Η h συνεχής στο[1,3] ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

h(1)=f(1)-1=2-1=1>0

h(3)=f(3)-5=4-5=-1<0

Άρα,h(1)h(3)<0.Οπότε,από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $h(x_o)=0 \Leftrightarrow f(x_o) = 2x_o - 1$.

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Δ4.Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σημείο Μ(ξ,f(ξ)) τέτοιο ώστε: f`(ξ)(-1)=-1⇔f`(ξ)=1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση φ(x)=f(x)-x, x∈[1,3].

Ηφ συνεχής στο [1,3] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Η φ παραγωγίσιμη στο (1,3) ως διαφοράπαραγωγίσιμωνσυναρτήσεων,με:

φ`(x)=f`(x)-1

φ(1)=f(1)-1=2-1=1

φ(3)=f(3)-3=4-3=1

Άρα, φ(1)=φ(3).Οπότε, από Θ.Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα ξ∈(1,3)⊆ $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: φ'(ξ)=0⇔f`(ξ)=1.

Δ5.Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε,
f($\mathbb{R}$) $= (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))$

Όμως,f($\mathbb{R}$) $= \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Άρα,$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Οπότε,$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{f(x)} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{f(x)} e^x\right) = 0$,διότι $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ και $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

ΓΚΟΥΜΑ ΑΝΘΗ
ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ