

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , τότε να αποδείξετε ότι συνάρτηση  $f+g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει :

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

**(Μονάδες 10)**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής στο  $x_0$ , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. **(μονάδα 1)**

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. **(μονάδες 4)**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή ή λέξη Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι πάντοτε συνεχής στο  $x_0$ .

β. Αν  $f(x)=a^x$ ,  $a>0$ , τότε ισχύει  $(a^x)'=xa^{x-1}$

γ. Αν για την συνάρτηση  $f$  ισχύει το θεώρημα ROLLE στο διάστημα  $[a,\beta]$ , τότε η γραφική της παράσταση έχει σε ένα τουλάχιστον σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

δ. Αν  $f$  είναι συνεχής συνάρτηση στο  $[a, \beta]$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $[a, \beta]$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

ε. Μια συνεχής συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της  $f$  χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

**(Μονάδες 10)**

### **ΘΕΜΑ Β**

Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x \ln x + 2x - 3$ ,  $x \geq 1$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(1, e)$

**(Μονάδες 6)**

**B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  για  $x \geq 1$ .

**(Μονάδες 6)**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 2023$ , έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $[1, +\infty)$

**(Μονάδες 6)**

**B4.** Να δείξετε ότι η ευθεία  $(\epsilon) : y = 4x - e - 3$  εφάπτεται στην γραφική παράσταση της  $f$ .

**(Μονάδες 7)**

### **ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 1$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:  
 $f^2(x) - 1 = -2xf(x)$

**Γ1.** Να δείξετε ότι:  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**(Μονάδες 8)**

**Γ2.** Να δείξετε ότι:  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**(Μονάδες 4)**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι:  $(x^2 + 1)f'(x) + \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$ .

**(Μονάδες 7)**

**Γ4.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu(f(x))$ .

**(Μονάδες 6)**

## **ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ , με  $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$  για την οποία ισχύει:  
 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = 1$  και  $f(3) = 4$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(1) = 2$ .

**(Μονάδες 4)**

**Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

**(Μονάδες 6)**

**Δ3.** Να δείξετε ότι η ευθεία  $y = 2x - 1$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε τουλάχιστον ένα σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (1, 3)$ .

**(Μονάδες 6)**

**Δ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο  $M(\xi, f(\xi))$  στο οποίο η εφαπτομένη της  $C_f$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon): x + y - 1 = 0$ .

**(Μονάδες 5)**

**Δ5.** Αν η  $f$  φαίνεται γνησίως αύξουσα στο  $\mathcal{R}$ , να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{f(x)}$ .

**(Μονάδες 4)**

## **ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΓΚΟΥΜΑ ΑΝΘΗ  
ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ**