3ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΒΟΛΟΥ

Γ΄ ΤΑΞΗ

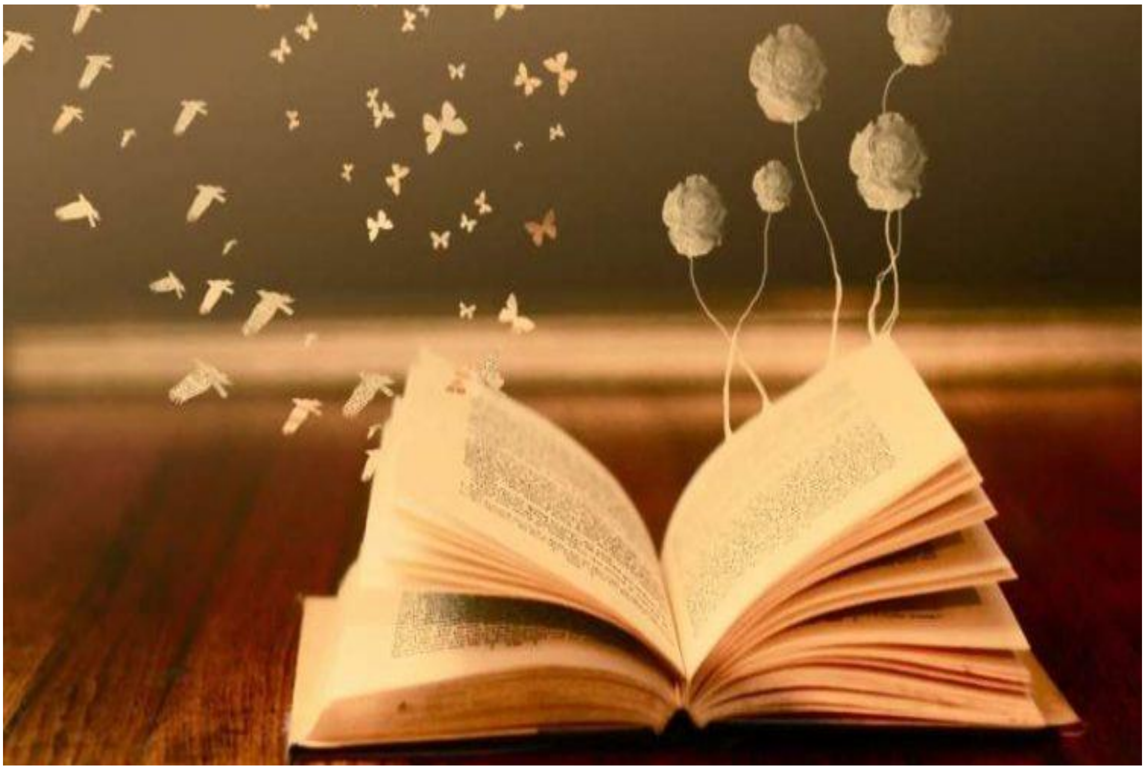
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΪΟΥ

ΣΤΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ



ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2022 – 2023

<u>1ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ</u>

ΘΕΜΑ 1

Α) Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, η g περιττή και h = gof, φ = fog, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

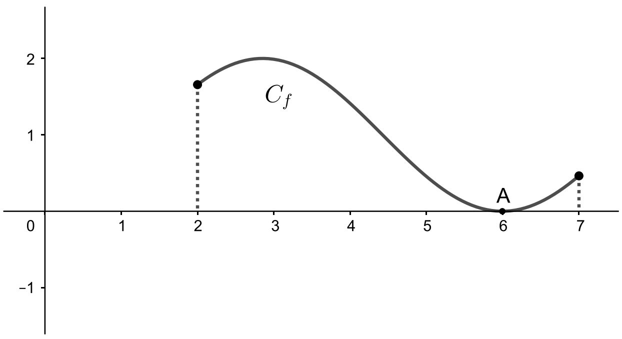
x	f (x)	g (x)	h (x)	φ (x)
- 3	0	0		
- 2	2	2		
- 1	2	2		
0	0	0		
1				
2				
3				

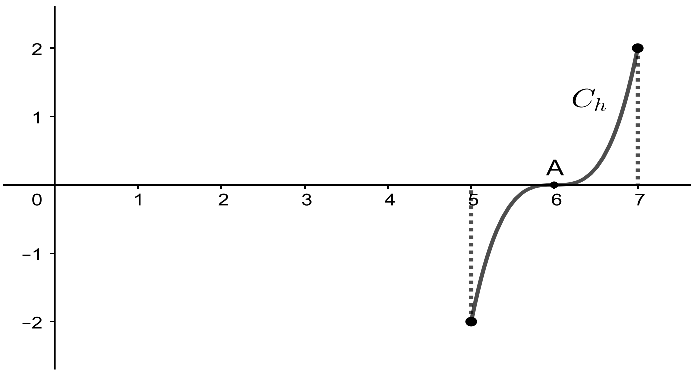
Β) Να αποδείξετε ότι: (x′) = 1.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του Α(6,0). Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

$$\lim_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}$$ (Μονάδες 07)

$$\lim_{x\to 6}\frac{1}{h(x)}$$ (Μονάδες 07)

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}$$ (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in$R.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in$R. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την $f'(5)$. (Μονάδες 7)

γ) Για $x > 1$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$, $x\in\mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

(Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbf{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

(Μονάδες 07)

2ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1) Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
$f(x)$	$f'(x)$
α	0
αx	α
$\beta x + \alpha$	β
$\alpha x^2 + \beta$	$\alpha x + \beta$
βx^2	$2\alpha x$
$\alpha x^2 - \beta x$	$2\beta x + \gamma$
$\beta x^2 + \alpha x - \gamma$	$2\beta x$
	$2\alpha x - \beta$
	$2\alpha x + \beta$
	$2\beta x + \alpha$
	$2\alpha + \beta x$

Α2) Να αποδείξετε ότι: (f + g)' = f' + g' .

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g.

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

$\int_3^8 f(x)dx$

$\int_5^8 2f(x)dx$

$\int_1^5 (f(x)+g(x))dx$ (Μονάδες 18)

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$. (Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x$, $x\in\mathbf{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0,g(0))$. (Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. (Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει

$f^2(x)+x^2=4$ για κάθε $x\in[-2,2]$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

(Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f.

(Μονάδες 09)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 04)

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f. Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1,\sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το B.

(Μονάδες 06)

3ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1)

1. ***** Αν για μια συνάρτηση f εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α, β], τότε εφαρμόζεται και το θεώρημα μέσης τιμής στο ίδιο διάστημα. **Σ** **Λ**

2. ***** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], τότε κρίσιμα σημεία της f είναι τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f ΄ μηδενίζεται και τα σημεία του διαστήματος (α, β) στα οποία η f δεν παραγωγίζεται. **Σ** **Λ**

3. ***** Αν $f'(x) = (x-1)^2$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ** **Λ**

4. ***** Αν $f'(x) = |x-1|$, τότε το σημείο $x_0 = 1$ είναι τοπικό ακρότατο της f. **Σ** **Λ**

5. ***** Αν $f'(x) = x^2 + 1$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα. **Σ** **Λ**

6. ***** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο R. **Σ** **Λ**

7. ***** Αν $f'(x) = x^2 - 5x + 6$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα [2, 3]. **Σ** **Λ**

8. ***** Αν $f'(x) = (x+3)x^2$, τότε το $x_0 = -3$ είναι θέση τοπικού ελαχίστου. **Σ** **Λ**

9. ***** Για τη συνάρτηση f με $f(x) = 3x^2$, $x \in [-3, 2]$ υπάρχει ένα μόνο τοπικό ακρότατο. **Σ** **Λ**

10. ***** Για τη συνάρτηση $f(x) = ημx$, $x \in R$, υπάρχει τουλάχιστον ένα τοπικό ελάχιστο μεγαλύτερο από κάποιο τοπικό μέγιστο. **Σ** **Λ**

Ερωτήσεις διάταξης

1. ****** Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με f γνησίως φθίνουσα στο R και g γνησίως αύξουσα στο R. Επιπλέον ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in R$.

Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)$$

2. ****** Να τις τοποθετήσετε σε μια σειρά ώστε το πεδίο ορισμού καθεμιάς να είναι ευρύτερο διάστημα από το πεδίο ορισμού της προηγούμενής της.

α) $f(x) = \sqrt{x-2}$, **β)** $g(x) = \ln x$, **γ)** $h(x) = \dfrac{3x+1}{\sqrt{x-1}}$, **δ)** $φ(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2x-3}}$

Α2) Να αποδείξετε ότι:$(x^2)' = 2x$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f(x)=x-\dfrac{x-1}{x^2+1}$

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y=x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "$1-1$". (Μονάδες 09)

γ) να βρεθεί η μέση τιμή των ωρών της υπερωριακής απασχόλησης (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 3

Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τη συνάρτηση $x(t) = t^2 - 4t - 1, t \geq 0$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα (s) και το $x(t)$ σε μέτρα (m).

α) Να βρείτε την ταχύτητα $\upsilon(t)$ του σημείου σε χρόνο t. (Μονάδες 08)

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του υλικού σημείου όταν $t_1 = 1$ s και $t_2 = 3$ s. (Μονάδες 06)

γ) Σε ποια χρονική στιγμή το σημείο είναι στιγμιαία ακίνητο; (Μονάδες 05)

δ) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

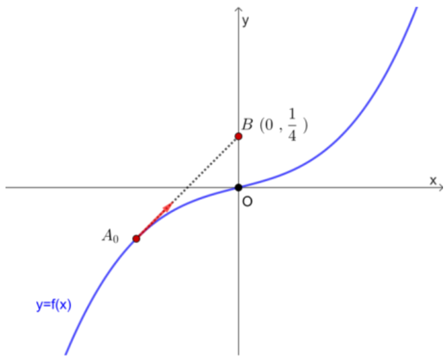
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση $y=\left(3\alpha^2+\frac{1}{4}\right)x-2\alpha^3$. (Μονάδες 8)

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_o, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

1.Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0. (Μονάδες 8)

2.Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_o, είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_o. (Μονάδες 9)

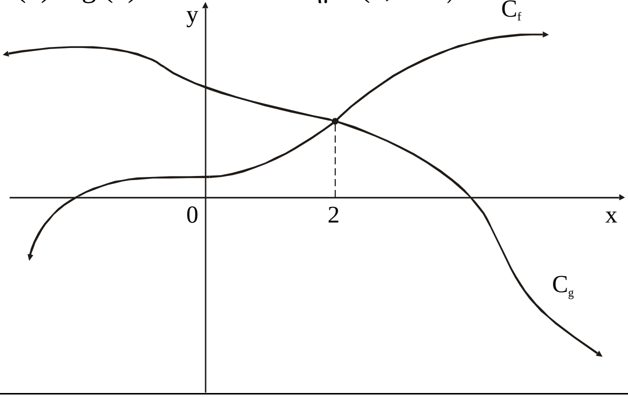


4ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1) **Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε** κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Στο παρακάτω σχήμα η λύση της ανισότητας $f(x) > g(x)$ είναι το διάστημα $(2, +\infty)$. **Σ** **Λ**



2. Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R ισχύει ότι f (x) > 0 για κάθε x ∈ R και f γνησίως αύξουσα, τότε και η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως αύξουσα στο R. **Σ** **Λ**

3. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα Δ με κοινό σύνολο τιμών το (0, + ∞), τότε και η συνάρτηση f·g είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ. **Σ** **Λ**

4. Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1 στο διάστημα Δ, τότε θα ισχύει $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε x ∈Δ. **Σ** **Λ**

4. Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα x΄x είναι

Α. 6 **Β.** 5 **Γ.** 4 **Δ.** 3 **Ε.** 0

Α2) Δώστε τους ορισμούς. Συνάρτηση. Συνεχής συνάρτηση στο x_0

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & αν\ x \le 0 \\ x^2 - 3x + 1\,, & αν\ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)

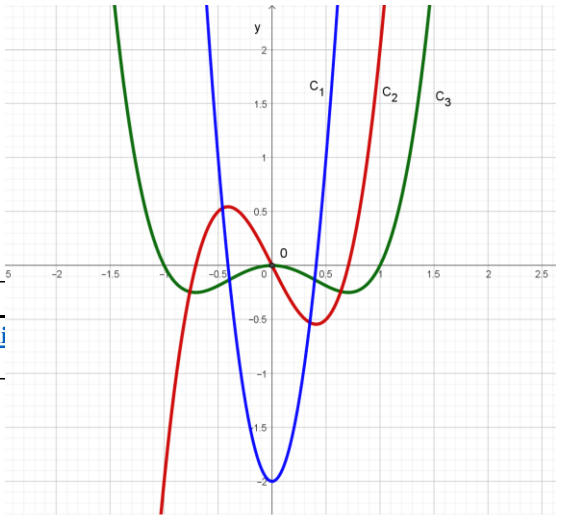
γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα

[-1,1] και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

(Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, $f\,'$ και F, όπου F



μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=4x^3-2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,

α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος, τη συνάρτηση F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.

(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \geq 1$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0,\pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0,\pi]$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi x f'(x)dx = \frac{\pi}{e^\pi}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x+\eta\mu x)\cdot x}dx < 1$.

(Μονάδες 7)

<u>5ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Α1) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. * Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας σταθερής συνάρτησης σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. **Σ** **Λ**

2. * α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε θα είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0, τότε θα είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ** **Λ**

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. **Σ** **Λ**

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε δεν είναι συνεχής στο x_0. **Σ** **Λ**

3. * Στον τύπο $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ το Δx είναι πάντοτε θετικό. **Σ** **Λ**

4. * Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο R. **Σ** **Λ**

5. * Οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f (x) = αx + β σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου ορισμού της συμπίπτουν με τη γραφική παράσταση της f. **Σ** **Λ**

Α2) 1. Τι λέγεται συντελεστής μεταβολής ή μεταβλητότητας;

2.Τι γνωρίζεται για την ομοιογένεια του δείγματος.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x-1}$ με $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε'): $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

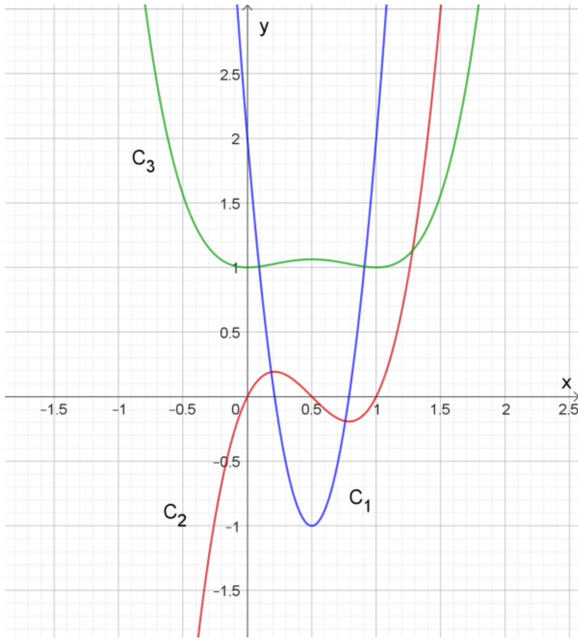
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ με $x \in$R.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = -2x + 2$ με $x \in$R. (Μονάδες 7) β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της (Μονάδες 10)

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq 5$. (Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.

ς(Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F.(Μονάδες 6)

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

6ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1) 1. ****** Να συμπληρώσετε τα κενά στη στήλη Β με γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της στήλης Α.

Στήλη Α *ιδιότητες της f*	**Στήλη Β** *γραφική παράσταση της f*
1. $D_f = [2, 5]$ και f συνεχής στο $[2, 5]$	
2. $D_f = [0, 7]$ και $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$	
3. $D_f = [0, 3) \cup (2, 5]$ και $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$	
4. $D_f = [3, 10]$ και $\lim\limits_{x \to 7} f(x) \neq f(7)$	

2. ****** Να συμπληρώσετε τις ισότητες στη στήλη Β:

Στήλη Α *συνάρτηση f (x)*	**Στήλη Β** *όριο της f (x)*
1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x - 5}$	$\lim\limits_{x \to 5} f(x) =$ ....
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ ....
3. $f(x) = -x^2$	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) =$ ....
4. $f(x) = x^\kappa,\ \kappa \in N^*$	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

Β) Να αποδείξετε ότι: (1΄) = 0. **Μονάδες 15**

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + 1$, με $x \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = x^2$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$. (Μονάδες 09)

Έστω $y = \lambda x + \beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, \frac{2}{3})$. Να αποδείξετε ότι: β) $\lambda = 1$.

(Μονάδες 07)

γ) Η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι: $y = x + \frac{5}{3}$. (Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)| \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta) - f(\alpha)| \leq 3|\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. (Μονάδες 4)

<u>7ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Α1) Στη στήλη Α του πίνακα Ι γράφονται οι τύποι κάποιων συναρτήσεων και στη στήλη Β οι εξισώσεις της οριζόντιας ή κατακόρυφης ασύμπτωτης των συναρτήσεων αυτών (αν υπάρχουν). Να γίνει αντιστοίχιση, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+2}$	**α.** δεν έχει οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη
	β. η $x=2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
2. $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$	**γ.** η $x=-2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη και δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη
3. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2+4}$	**δ.** ο άξονας x΄x οριζόντια ασύμπτωτη στο + και η $x=-1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
4. $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^3+1}$	**ε.** η $x=-2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη και η $y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο +
5. $f(x)=\dfrac{3x^2+3x}{x+2}$	**ζ.** η $y=-2$ οριζόντια ασύμπτωτη
	η. η $y=1$ οριζόντια ασύμπτωτη στο -

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5

Α2) 1. Ποια είναι τα μέτρα διασποράς ποσοτικών δεδομένων;

2. Δώστε δύο ορισμούς απ΄ αυτά.

ΘΕΜΑ 2

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+3x+2,\ x>0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)+2023=0$ έχει θετική λύση.

(Μονάδες 6)

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής στο Βόλο παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου ($\frac{x^2}{4}$+ 25x + 25) €. Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι (1000 -$\frac{x}{2}$) €, πόσα ταψάκια γαλακτομπούρεκο πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:

$$xf(x)+\sigma\upsilon\nu x=1-x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=0$$

(Μονάδες 4)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1.$$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

(Μονάδες 7)

<u>8ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Αντιστοιχίστε κάθε τύπο συνάρτησης που είναι στη στήλη Α με τον τύπο της συνάρτησης της πρώτης παραγώγου της που είναι στη στήλη Β.

Στήλη Α ***f (x)***	**Στήλη Β** ***f ΄(x)***
$3x^2$	$6x^2 - 1$
$3x$	$6x$
$2(x^2 - 1)$	3
$(3x)^2$	$4x$
$(3x - 1)^2$	$3x - 1$
$3x^2 - x$	$18x$
	$6(3x - 1)$
	$6x^2$
	$6x - 1$

Α2) Να αποδείξετε ότι $[f(x)\, g(x)]' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

(Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της.(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = 3x^2 - 6x + 2023, \ \ x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x) = 6x - 6, \ \ x \in \mathbb{R}$.(Μονάδες 05)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2020$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

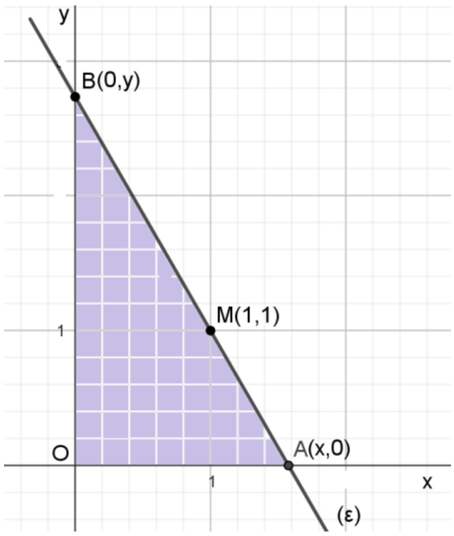
Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0), x>0$ και $B(0,y), y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $E(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$.(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3, \mathrm{E}(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $\mathrm{K}(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



9ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις.

1. * Η κλίση της εφαπτομένης της f (x) = 3x - 2 στο $x_0 = -1$ είναι ίση με 3. **Σ** **Λ**
2. * Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης ενός κινητού s (t) είναι η στιγμιαία ταχύτητα του κινητού. **Σ** **Λ**
3. * Ο ρυθμός μεταβολής της πρώτης παραγώγου μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f είναι η δεύτερη παράγωγος της f. **Σ** **Λ**
4. * Αν η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε και οι δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0. **Σ** **Λ**
5. * Ισχύει $(\log x)' = \frac{1}{x}$, για κάθε x > 0. **Σ** **Λ**

Θέματα προσομοίωσης για τις Απολυτήριες εξετάσεις

Α2) 1. Ποια είναι τα μέτρα θέσης ποσοτικών δεδομένων;

1. **Δώστε δύο ορισμούς απ΄αυτά.**

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

f(x) = ln(1+ e^x) και g(x) = 2lnx .

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f + g. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f + g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 2023-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} -3x^2+1, x<0 \\ -x^3+3x^2+1, x\geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1<0$ και $x_2>3$. (Μονάδες 12)

β) 1.Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). (Μονάδες 04)

2.Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$. (Μονάδες 04) γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ε και την ευθεία x=0. (Μονάδες 05)

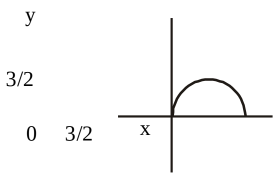
10^{o} *ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ*

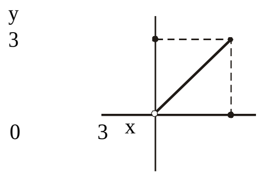
ΘΕΜΑ 1

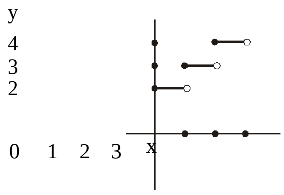
Α1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

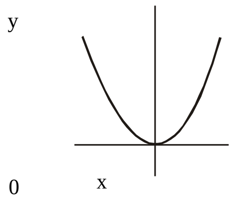
Πίνακας Ι

<table>
<tr><th>Στήλη Α</th><th>Στήλη Β</th></tr>
<tr><td>

1. 

2. 



4. 

</td><td>

α. $D_f = R$

β. $D_f = R - \{0\}$

γ. $D_f = [0, 3]$

δ. $D = (0, 3]$

ε. $D_f = [0, 3)$

ζ. $D_f = (0, 3)$

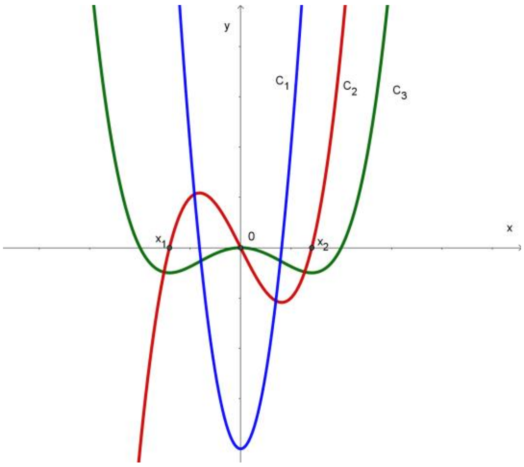
η. $D_f = [0, +\infty)$

</td></tr>
</table>

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

Α2) Να αποδείξετε ότι $[c\,f(x)]' = c\,f\,'(x)$.



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, $f\,'$ και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,

α)

i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F\,'=f$		0	0	0	
F					

(Μονάδες 10)

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F. (Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $f\,'$ και F. (Μονάδες 07)

<u>ΘΕΜΑ 3</u>

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \le \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 2$ (Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$. (Μονάδες 09) γ) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

“ $\left|f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right| = -f(x)\cdot\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0 ”

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 08)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $\mathrm{x'x}$ και τις κορυφές B και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathrm{f(x)=e^x}$, $\mathrm{x<1}$ και $\mathrm{g(x)=\frac{e}{x}}$, $\mathrm{x>1}$, αντίστοιχα. Έστω $\mathrm{A(\alpha\,,0)}$ με $\alpha<1$.

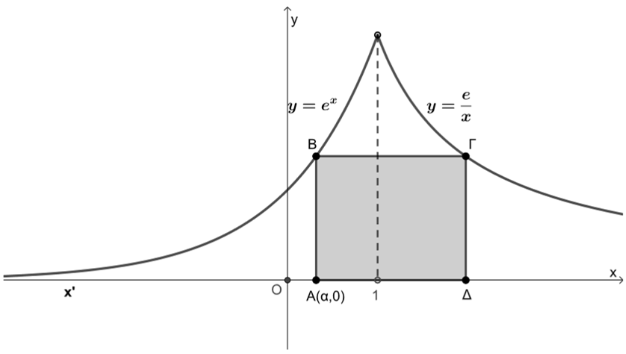
α) Να αποδείξετε ότι:

1.η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $\mathrm{x_\Delta = e^{1-\alpha}}$, (Μονάδες 6)

2.το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι $\mathrm{E(\alpha)=e-\alpha e^{\alpha}}$, $\alpha<1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)



Τελευταίες συμβουλές

1η Συμβουλή

Μην πανηγυρίζετε την ώρα που δίνονται τα θέματα. Ενδεχόμενα να κρύβουν κάποιες παγίδες που με την πρώτη ματιά δεν φαίνονται.

2η Συμβουλή

Να είστε ψύχραιμοι κατά την διάρκεια των εξετάσεων για να αποδώσετε στο μέγιστο της προετοιμασίας σας.

3η Συμβουλή

Μην απογοητεύεστε αν τυχόν σας φαίνονται άγνωστα τα θέματα. Θα ακολουθήσουν 2 ώρες που μπορείτε να κάνετε τα πάντα. Σίγουρα είναι θέματα που κάπου , κάποτε τα έχετε διδαχθεί.

4η Συμβουλή

Μην συζητάτε με άλλους συνυποψήφιούς σας για τις λύσεις των θεμάτων μετά το τέλος της εξέτασης. Το μόνο που θα σας προσφέρει μια τέτοια κουβέντα είναι προβληματισμός. Αν θέλετε να συμβουλευτείτε κάποιον , μιλήστε με τον υπεύθυνο καθηγητή.

5η Συμβουλή

Μην επηρεάζεστε από ενδεχόμενη αποτυχία σε κάποιο μάθημα. Σκεφθείτε ότι είναι καλύτερα να έχετε αποτύχει σε ένα μάθημα παρά σε δύο ή περισσότερα.

……………………………………και μετά ,

Εύχομαι επιτυχία στους στόχους σας!!!!!!!!!!!!