<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Απόδειξη στη σελίδα 111 του σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός στην σελίδα 104 του σχολικού βιβλίου

Α3. Θεωρία στην σελίδα 128 του σχολικού βιβλίου

Α4. α)Λάθος

β)Λάθος

γ)Λάθος

δ)Σωστό

ε)Σωστό

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. Η συνάρτηση $f = g \circ h$ ορίζεται αν $x \in A_h \Leftrightarrow x > 0$

και $h(x) \in A_g \Leftrightarrow \ln x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $A_f = (0, +\infty)$

Για $x > 0$ έχουμε

$$f(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2h(x)}}{e^{h(x)}} = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$$

Άρα $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x},\ x > 0$

Β2.i.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{(4 - x^2)' x - (4 - x^2) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{-2x^2 - 4 + 2x^2}{x^2} = \frac{-x^2 - 4}{x^2} = -\frac{x^2 + 4}{x^2} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$

B2ii.

Παρατηρούμε ότι $e<\pi \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e)<f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi}$

Είναι $e>2 \Leftrightarrow e^2>4 \Leftrightarrow 4-e^2<0$

Επομένως

$$\pi\frac{4-e^2}{e} > \pi\frac{4-\pi^2}{\pi} \Leftrightarrow \frac{\pi\cdot(4-e^2)}{e} > e\left(4-\pi^2\right) \Leftrightarrow \frac{\pi\cdot(4-e^2)}{e} > 4-\pi^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi\cdot(4-e^2)}{e\cdot(4-e^2)} > \frac{4-\pi^2}{4-e^2} \Leftrightarrow \frac{4-\pi^2}{4-e^2} < \frac{\pi}{e}$$

B3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left((4-x^2)\cdot\frac{1}{x}\right) = 4\cdot(+\infty) = +\infty$

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$ (άξονα y'y)

Η f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=\lambda x+\beta$ με

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 \text{ και}$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0$$

Δηλαδή η ευθεία $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$

Στο $-\infty$ δεν ορίζεται η συνάρτηση, άρα δεν υπάρχουν ασύμπτωτες

Β4. ‘Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

Με αυτό υπόψιν κι επειδή $\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|\le 1$ είναι

$\left|\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right|=\dfrac{\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|}{|f(x)|}\le\dfrac{1}{|f(x)|}$ από όπου προκύπτει

$$-\frac{1}{|f(x)|}\le\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\le\frac{1}{|f(x)|}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{|f(x)|}\right)=0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{|f(x)|}$, από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε διαδοχικά

$$\int_2^3 x\cdot f(x)\,dx=\int_2^3 x\cdot\left(\frac{1}{x}+\alpha\right)dx=\int_2^3(1+\alpha x)\,dx=$$

$$=\left[x+\frac{\alpha x^2}{2}\right]_2^3=\left(3+\frac{9\alpha}{2}\right)-\left(2+\frac{4\alpha}{2}\right)=3-2+\frac{9\alpha}{2}-\frac{4\alpha}{2}=1-\frac{5\alpha}{2}$$

Από την υπόθεση δίνεται

$$1-\frac{5\alpha}{2}=1\Leftrightarrow-\frac{5\alpha}{2}=0\Leftrightarrow\alpha=0$$

Γ2i. Είναι $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο 1, καθώς

$f(1)=1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2-3x+3\right)=1$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1, καθώς

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-3x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=-1$$

και

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{1-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με παράγωγο $f'(1)=-1$

Επομένως ορίζεται η εφαπτόμενη ευθεία στο $x_o=1$

Γ2ii.

Η ευθεία (ε) έχει εξίσωση

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$$
$$y-1=-1\cdot(x-1)\Leftrightarrow$$
$$y-1=-x+1\Leftrightarrow$$
$$y=-x+2$$

Η (ε) σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία με εφαπτομένη $\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=\frac{3\pi}{4}$

Γ3. Για $x<1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=2x-3$

Ισχύει $x<1\Leftrightarrow 2x<2\Leftrightarrow 2x-3<-1$

Δηλαδή $f'(x)<0$ που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x<1$

Για $x>1$ η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x>1$

Η f είναι συνεχής στο 1, επομένως τελικά η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και 1-1.

Για $x<1$ είναι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$$

Για $x>1$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως το σύνολο τιμών είναι το σύνολο

$$\Delta=f(\mathbb{R})=f((-\infty,+\infty))=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

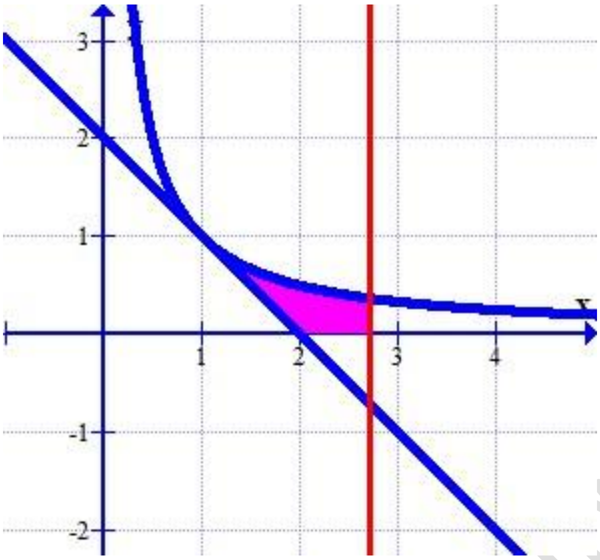
Γ4.

Για $x>1$ η f' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{0-2x}{x^4}=\frac{2}{x^3}>0$$

Άρα η f είναι κυρτή, δηλαδή είναι πάνω από την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο της με $x>1$.

Άρα για $x>1$ είναι $f(x)>-x+2 \Leftrightarrow f(x)-(-x+2)>0$



Το εμβαδό ισούται με

$$E=\int_1^e f(x)\,dx-\int_1^2(-x+2)\,dx=$$

$$=\int_1^e \ln x\,dx-\int_1^2(-x+2)\,dx=$$

$$=[\ln x]_1^e-\left[-\frac{x^2}{2}+2x\right]_1^2=$$

$$=(1-0)-\left(\frac{-4}{2}+4+\frac{1}{2}-2\right)=$$

$$=1+2-4-\frac{1}{2}+2=$$

$$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έστω η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ με $x\in(0,2)$ και $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=\ell$

Είναι $h(x)=\dfrac{f(x)-2x}{x-1}\Leftrightarrow f(x)-2x=h(x)(x-1)\Leftrightarrow f(x)=h(x)(x-1)+2x$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left[h(x)\cdot(x-1)+2x\right]=\ell\cdot 0+2\cdot 1=2$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,2)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, άρα

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)\Leftrightarrow \ln(2-1)-\frac{1}{1}+\kappa=2\Leftrightarrow 0-1+\kappa=2\Leftrightarrow \kappa=3$$

Δ2.

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$f(x)=0\Leftrightarrow \ln(2-x)-\frac{1}{x}+3=0\Leftrightarrow x\cdot\ln(2-x)-1+3x=0$$

Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=x\cdot\ln(2-x)-1+3x,\ x\in[0,1]$

Η φ είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη

$\varphi(0)=0-1+3<0$ και $\varphi(1)=1\cdot\ln 1-1+3=0-1+3=2>0$

Άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\varphi(x_o)=0\Leftrightarrow x_o\cdot\ln(2-x_o)-1+3x_o=0\Leftrightarrow \ln(2-x_o)-\frac{1}{x_o}+3=0\Leftrightarrow f(x_0)=0$$

Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\dfrac{1}{x}+3\right)=-\infty$

Επομένως υπάρχει αριθμός μ κοντά στο 2 με $\mu<2$ τέτοιος ώστε $f(\mu)<0$

Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(1,\mu)\subset(0,2)$ και ισχύει $f(1)=2$ και $f(\mu)<0$

Άρα $f(1)\cdot f(\mu)<0$ και από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(1,\mu)\subset(1,2)$ τέτοιο ώστε

$f(x_2)=0$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με παράγωγο

$$f'(x)=\frac{(2-x)'}{2-x}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2-x}{x^2(2-x)}=\frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}$$

Το τριώνυμο $-x^2-x+2$ έχει ρίζες $x_1=1$ και $x_2=-2$ από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x_1=1$

Το πρόσημο της παραγώγου και η μονοτονία της συνάρτησης φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	0	1	2
f'	+	0	−
f	↗		↘

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και έχουμε

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{\frac{1}{3}}+3=\ln\left(\frac{6}{3}-\frac{1}{3}\right)-3+3=\ln\left(\frac{5}{3}\right)>0$$

Άρα

$$\ln\frac{5}{3}>0\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)>f(x_1)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}\frac{1}{3}>x_1$$

Δ3.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subset(0,2)$ και συνεχής στο διάστημα $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]\subset(0,2)$

επομένως από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)\subset(0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\frac{f\left(\frac{1}{3}\right)-0}{\frac{1-3x_1}{3}}=\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Από το (Δ2) είδαμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}$

Η f' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f''(x)=\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{(x-2)'}{(x-2)^2}-\frac{2x}{x^4}=-\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2}{x^3}<0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $(0,2)$, άρα είναι και 1-1 που σημαίνει ότι το ξ είναι μοναδικό.

Δ4.

Επειδή F,G είναι αρχικές συναρτήσεις της f, θα είναι $F'(x)=G'(x)$,επομένως από συνέπειες ΘΜΤ θα υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(x)=G(x)+c_1$

Για $x=x_1$ είναι $F(x_1)=G(x_1)+c_1\Rightarrow 0=G(x_1)+c_1\Rightarrow G(x_1)=-c_1$

Όμοια για $x=x_2$ είναι $F(x_2)=G(x_2)+c_1\Rightarrow F(x_2)=0+c_1$

Επομένως $F(x_2)+G(x_1)=c_1-c_1=0$

Δ4ii. Η σχέση γράφεται ισοδύναμα

$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x\Leftrightarrow x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x=0$

Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι $F(x_2)+G(x_1)=0\Leftrightarrow G(x_1)=-F(x_2)$

Έστω η συνάρτηση $t(x)=x_1F(x)+x_2\cdot G(x)-x_1-x_2+2x,\ x\in[x_1,x_2]\subset(0,2)$

Η t είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ με

$t(x_1)=x_1F(x_1)+x_2\cdot G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=0+x_2\cdot G(x_1)+x_1-x_2=-x_2F(x_2)-(x_2-x_1)$

και $t(x_2)=x_1F(x_2)+x_2\cdot G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1$

Επομένως $t(x_1)\cdot t(x_2)<0$ διότι

$x_1<x<1\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}f(x_1)<f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

$1<x<x_2\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}f(x_2)<f(x)<f(1)\Leftrightarrow f(x)>0$

Άρα $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$

Επομένως η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα (x_1, x_2),

άρα για $x_1 < x_2 \overset{F\uparrow}{\Leftrightarrow} F(x_1) < F(x_2) \overset{F(x_1)=0}{\Leftrightarrow} F(x_2) > 0$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $t(\rho) = 0$

Η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με παράγωγο

$$t'(x) = x_1 \cdot F'(x) + x_2 \cdot G'(x) + 2 \Leftrightarrow$$
$$t'(x) = x_1 \cdot f(x) + x_2 \cdot f(x) + 2$$

Εφόσον $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, θα ισχύει $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

δηλαδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[x_1, x_2]$ και συνεχής, άρα είναι 1-1 και ο αριθμός $\rho \in (x_1, x_2)$ είναι μοναδικός

Επιμέλεια:

Καλαϊτζίδης Θεόδωρος, Πανάγου Γεώργιος, Γκούμα Ανθή, Πασχάλης Νίκας, Σπυρόπουλος Παναγιώτης, Βανούσης Χρίστος, Πετρά Ζωή, Καραγεώργος Θεμιστοκλής, Μπλατσιώτη Νίκη, Καραμπετάκη Νίκη, Κατανας Αντώνης, Φούντος Χρήστος, Κολοκυθα Βασιλική, Πρώιας Δημήτρης, Καπαράκης Εμμανουήλ

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Διαδικτυακό, Νέο Ηράκλειο, Αμφιάλη, Νίκαια, Λαμία, Μοσχάτο, Περιστέρι Κέντρο, Παγκράτι Κέντρο, Καβάλα, Θεσσαλονίκη Αμπελόκηποι, Φιλοθέη Νέο Ψυχικό, Άγιος Νικόλαος Κρήτης