ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ΄ ΓΕ.Λ. ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΑΝΑ ΘΕΜΑ (ΣΧ.ΕΤΗ: 2000-2023)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Αναστασία Διακουμάκου
Καθηγήτρια Μαθηματικών
Διευθύντρια Βαμβακάρειου Λυκείου
Εκπαιδευτηρίων "ΔΕΛΑΣΑΛ" Σύρου

ΘΕΜΑ Α (Ερωτήσεις Θεωρίας)

1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A $(x_0, f(x_0))$.

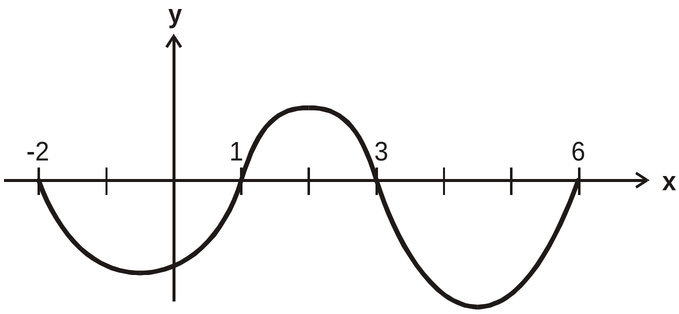
2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

3. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

α) Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

β) Αν $f'(x)<0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τι συμπεραίνετε για τη μονοτονία της συνάρτησης f;

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης f στο διάστημα [-2,6].



Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

5. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε:

α) όλες οι συναρτήσεις της μορφής:$G(x)=F(x)+c$, $c\in R$ είναι παράγουσες της f στο Δ και

β) κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή: $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$.

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α) $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = ...$

β) $\int_\alpha^\beta \left(f(x)+g(x)\right)dx = ...$

γ) $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x)+\mu g(x)]dx = ...$

όπου λ, $\mu\in R$ και f,g συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β].

7. Να βρείτε τη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει $f''(x)=6x+4$, $x\in R$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο της Α(0,3) έχει κλίση 2.
8. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 (e^x + x)dx$ β) $\int_1^4 \frac{3x^2}{\sqrt{x}}\,dx$ γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)\,dx$

9. Να ορίσετε πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα [α, β].
10. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν
    - η f είναι συνεχής στο [α, β] και
    - $f(\alpha) \neq f(\beta)$

    δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.
11. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞;
12. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) και ισχύει: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
13. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;
14. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;
15. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞;
16. Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;
17. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
18. Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$
19. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
20. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;
21. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

22. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$
23. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α, β];
24. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;
25. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.
26. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;
27. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.
28. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f;
29. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
30. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)
31. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.
32. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;
33. Πότε μια συνάρτηση $f : A \to R$ λέγεται συνάρτηση 1 – 1;
34. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α,x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
35. Πότε δύο συναρτήσεις f,g λέγονται ίσες;
36. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
37. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
38. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

39. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

40. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

41. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

42. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, αν για κάποιο $x_0 \in R$ ισχύει $f''(x_0)=0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

43. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f:R \rightarrow R$ που είναι «1-1» είναι και γνησίως μονότονη.»

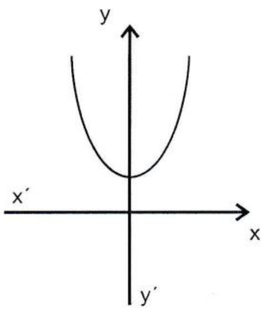
α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

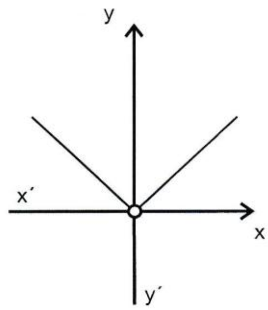
44. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

45. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του R. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

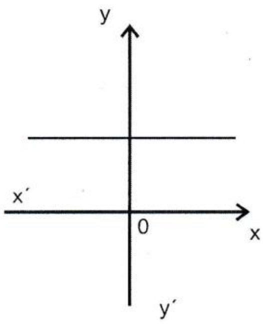
46. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



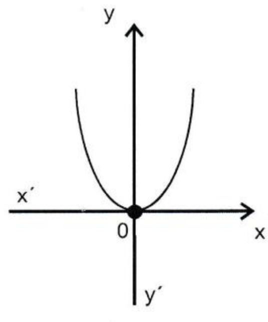
(f)



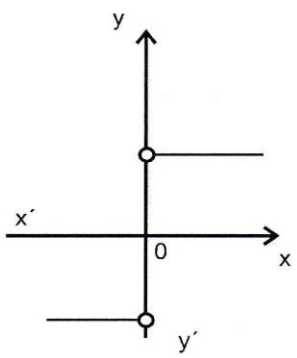
(g)



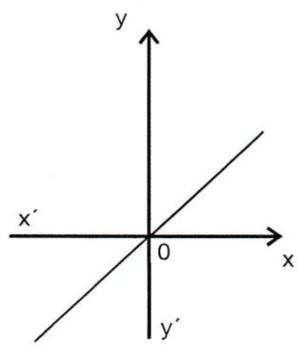
(F)



(G)



(H)



(T)

Ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

47. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων f, g: $(0,+\infty)\rightarrow R$, αν ισχύει $\lim_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to 0} g(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=0$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

48. Έστω $A\subseteq R$

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

β) i . Πότε μια συνάρτηση $f: A\rightarrow R$ έχει αντίστροφη;

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του **(i)**, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

49. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat που αφορά τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης .

50. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

51. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

52. Πότε δύο συναρτήσεις f , g λέγονται ίσες;

53. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α, x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0, β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .

54. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

55. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

56. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R, ισχύει $f'(x)>0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

57. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0) = (f)'(x_0) + (g)'(x_0)$.

58. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

59. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

60. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x_o)} = +\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x_o)} = -\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α).

61. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

62. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ,να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
63. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];
64. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.
65. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:
    - όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
    - κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, με $c\in\mathbb{R}$.
66. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.
67. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;
68. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
69. Πότε η ευθεία $y =\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;
70. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
71. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$
72. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] του πεδίου ορισμού της;
73. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
74. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.
75. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;
76. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat.

ΘΕΜΑ Α (Ερωτήσεις Σωστού –Λάθους)

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f ' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.
2. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0,τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
3. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0,τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.
4. Η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.
5. Η συνάρτηση f με $f'(x) = -2\eta\mu x + \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} + 3$, όπου $x \in [\dfrac{\pi}{2}, \pi)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.
6. Αν $f'(x) = g'(x) + 3$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.
7. Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο [α, β] και συνεχής στο (α, β], τότε η f παίρνει πάντοτε στο [α, β] μία μέγιστη τιμή.
8. Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.
9. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$
10. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.
11. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
12. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
13. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα [α, β] , στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
14. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β] και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.
15. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α, β] και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.
16. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.
17. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση.
18. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και
$f'(x_0)=0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0.

19. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
20. Μία συνάρτηση $f : A \to R$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή :
αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.
21. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$
22. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση fog είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει : $(fog)'(x_0) = f'(x_0)\, g'(x_0)$.
23. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.
24. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$,τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.
25. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
26. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού R και ορίζονται οι συνθέσεις fog και gof, τότε αυτές οι συνθέσεις είναι υποχρεωτικά ίσες.
27. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y = x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.
28. Αν υπάρχει το όριο της f στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$, εφόσον
$f(x) \geq 0$ κοντά στο x_0, με $k \in N$ και $k \geq 2$.
29. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta) > 0$.
30. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\left(g(x)\right)$
31. Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει κοινό σημείο A με την ευθεία y = x, τότε το σημείο A ανήκει και στη γραφική παράσταση της f^{-1}.
32. Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{1}{f(x)}\right) = +\infty$
33. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

34. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ, στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

35. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ′ ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o. Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_o) και κοίλη στο (x_o, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο Α(x_o f(x_o)) είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

36. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι fog και gof, τότε είναι υποχρεωτικά $fog \neq gof$.

37. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

38. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

39. Ισχύει ο τύπος $\left(3^x\right)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in R$.

40. Ισχύει η σχέση $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α, β].

41. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o και $g(x_o) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $\dfrac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'\left(x_o\right) = \frac{f(x_o)g'(x_o) - f'(x_o)g(x_o)}{\left[g(x_o)\right]^2}.$$

42. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $\left[\ln|x|\right]' = \dfrac{1}{x}$

43. Μια συνάρτηση f:A → R είναι 1–1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x .

44. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α,β]. Αν G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$.

45. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα [α, β] και για κάθε x ε [α, β] ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

46. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

47. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

48. Αν $\alpha > 1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

49. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα.

50. Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα [α, β], τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx$

51. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β) όπου Α= $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και Β= $\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

52. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και f'(x) = g'(x) για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε ισχύει f(x) = g(x) για κάθε x∈Δ.

53. Αν μια συνάρτηση f:A→ R είναι 1–1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$, $x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y$, $y \in f(A)$.

54. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

55. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει f''(x) > 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x.

56. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx$.

57. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

58. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

59. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x.

60. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x\to x_0}(f(x)) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}(f(x) - \ell) = 0$.

61. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο x_0∈A, όταν f(x)≥f(x_0) για κάθε x∈A

62. $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

63. Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

64. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και ισχύει f(x)<0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x=α, x=β και τον άξονα x'x είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

65. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

66. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ και f(x) < 0 κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

67. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = R - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

68. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

69. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β), όπου $A = \lim_{x \to \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \to \beta^-} f(x)$

70. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x,\ x \in R$

71. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

72. Αν $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$, τότε ισχύει $(\alpha^x)' = x\alpha^{x-1}$

73. Αν ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε πάντοτε ισχύει fog = gof.

74. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

75. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

76. Μια συνάρτηση f:A → R λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

77. Για κάθε $x \in R_1 = R - \{x \mid \sigma\upsilon\nu\, x = 0\}$ ισχύει: $(\varepsilon\varphi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$

78. Ισχύει ότι: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

79. Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

80. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

81. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

82. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$

83. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

84. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση f(x)=y έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

85. Αν είναι $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε f(x)<0 κοντά στο x_0

86. $(\sigma\varphi x)'=\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}$ - {x | ημx≠0}

87. $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=[f(x)g(x)]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f',g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β]

88. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης - f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x'x, της γραφικής παράστασης της f.

89. Αν είναι 0<α<1 τότε $\lim_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$

90. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

91. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$.

92. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε f (x) < 0 κοντά στο x_0

93. Ισχύει ότι: $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in R$

94. Ισχύει ότι: $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

95. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

96. Αν μια συνάρτηση f είναι 1−1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

97. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $\lim_{x\to x_0}(-f(x))=+\infty$.

98. Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει: $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)$

99. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

100. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή -∞ τότε $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

101. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

102. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ $\in$ Δ, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)$

103. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

104. Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

105. Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$.

106. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

107. Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις fog και gof, τότε ισχύει πάντοτε ότι fog=gof.

108. Για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι (συνx)'= ημx.

109. Έστω f μία συνεχή ς συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$

110. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και f(x)>0 κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

111. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

112. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0.

113. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

114. Αν f είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β] και G είναι μία παράγουσα της f στο [α, β] τότε πάντοτε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$

115. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to R$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ = G(α)-G(β).

116. Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

117. Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0) \cup (x_0,\beta)$, είναι σταθερή στο $(\alpha,x_0) \cup (x_0,\beta)$.

118. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν, για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της, η εξίσωση y=f(x) έχει ακριβώς μια λύση ως προς x.

119. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

120. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

121. Αν f(x) = ln|x| για κάθε x≠0, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε x≠0.

122. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

123. Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού ν≥2, η οποία έχει ασύμπτωτη.

124. Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο [α,β], ισχύει:

αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$, τότε f(x)>0 στο [α,β].

125. Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f:R→R και g:R→R , αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

126. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η gof ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

127. Για κάθε συνάρτηση f:R→R που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

128. Αν 0<α<1, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

129. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

130. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α,β]→R, αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α,β], τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx=G(\alpha)-G(\beta)$.

131. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν x_1, $x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$.

132. Αν ένα σημείο Μ(α,β) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο Μ'(β,α) ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

133. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α,β]→R, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν f(α)=f(β), τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε f'(ξ)=0.

134. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f:[α,β]→R, αν ισχύει $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = 0$, τότε f(x)=0 για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

135. Η συνάρτηση f(x)=ημx με $x \in R$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

136. Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι γνησίως αύξουσα, ισχύει f '(x)>0 για κάθε $x \in \Delta$.

137. Ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{1-\text{συν}x}{x}=0$.

138. Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x.

139. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

140. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f: R→R μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

141. Αν μια συνάρτηση f: R→R είναι «1-1» τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

142. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το [0,1] και σύνολο τιμών το [2,3], τότε ορίζεται η fog με πεδίο ορισμού το [0,1] και σύνολο τιμών το [2,3].

143. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A. (με αιτιολόγηση)

144. Για κάθε συνάρτηση $f: A \to R$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0. (με αιτιολόγηση)

145. Η γραφική παράσταση της | f | αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x'x, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτόν τον άξονα.

146. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α, β], ισχύει:
Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε f(x)= 0 για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

147. Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

148. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$, τότε f(x)>0 για x κοντά στο x_0.

149. Μια πολυωνυμική συνάρτηση f: R→R διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

150. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{2\nu+1}}=+\infty$ για κάθε ν∈N.

151. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, x∈R έχει άξονα συμμετρίας τον y'y.

152. Η εικόνα f(Δ) ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

153. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο R και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα x'x. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f του οποίου η απόσταση από τον άξονα x'x είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

154. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ τότε f(x)>0 για κάθε x κοντά στο x_0.

155. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha, \beta)$, τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

156. Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο R, ισχύει f'(x)>0 για κάθε x∈R.

157. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=-\infty$

158. Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

159. $\left(\ln|x|\right)'=-\frac{1}{x}$, για κάθε x<0.

160. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

161. Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$, για κάθε $x\in R^*$.

162. Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x))=x$, για κάθε $x\in A$.

163. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε f(x)>0 κοντά στο x_0.

164. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν f''(x)> 0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

165. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, M, και μια ελάχιστη τιμή, m.

166. Αν f,g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α και Β αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

167. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

168. Αν μια συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα (α,β), παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ καμπή τότε $f''(x_0)=0$.

169. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: R \to R$, με $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ ισχύει ότι $f(x)>0$, για κάθε $x \in R$.

170. Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0.

171. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$

172. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1], παραγωγίσιμη στο (0,1) και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

173. Η συνάρτηση f(x)= σφx είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu x}$.

174. Αν $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$ τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

175. Ισχύει ότι $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$.

176. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

177. Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

178. Αν η $f: R \to R$ είναι μια «ένα προς ένα» ("1-1") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x'Oy'.

179. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι fog και gof, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

180. Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

181. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [α,β]. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ τότε $\int_\beta^\alpha f(x)dx \geq 0$.

182. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

183. Ισχύει $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

184. Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x \in R^*= R-\{0\}$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in R^*$.

185. Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις gof και fog , τότε οι gof και fog δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

186. Ισχύει ότι $\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

187. Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0 .

188. Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι f(x)=0, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

189. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε f(x)>0 κοντά στο x_0.

ΘΕΜΑ Α (Ερώτηση αντιστοίχισης)

1. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα στοιχεία της στήλης Β.

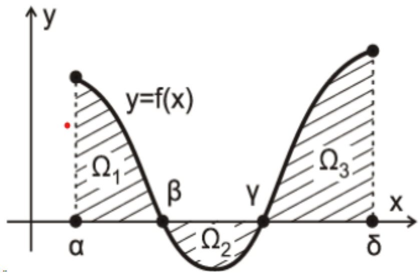
Στήλη Α Συναρτήσεις	**Στήλη Β Εφαπτόμενες**
α. $f(x)=3x^3$, $x_0=1$	1. y=-2x+π
β. f(x)=ημ2x, $x_0=\frac{\pi}{2}$	2. $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\|x\|$, $x_0=0$	3. y=9x-6
δ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0=4$	4. y=-9x+5
	5. δεν υπάρχει

ΘΕΜΑ Α (Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής)

1. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε:
   α) η εξίσωση f(x)=0 δεν έχει λύση στο (α,β).
   β) η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).
   γ) η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).
   δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=0 στο (α,β).

2. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1)=2$, $E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$, τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)\,dx$ είναι ίσο με : **α)** 6 **β)** -4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2



ΘΕΜΑ Β

1. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x\le 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3 \end{cases}$$

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -1/9$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο Α(4, f(4)).

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1 και x=2.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

γ) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2\ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση f: IR → IR με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in$ R, $m > 0$.

α) Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in$ IR .

β) Αν m = 10, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ) **i)** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1}.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+e^x}{1+e^{x+1}}$, $x \in R$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της στο R .

β) Για κάθε $x<0$ να αποδείξετε ότι: $f(5^x)+f(7^x)<f(6^x)+f(8^x)$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ημ3x}{x} & , x<0 \\ x^2+αx+βσυνx & , x \geq 0 \end{cases}$

α) Να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3$

β) Αν $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$, να αποδειχθεί ότι $α = β = 3$.

γ) Αν $α = β = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)dx$ **.**

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\chi^2}{\chi^2+1}$, $x \in R$.

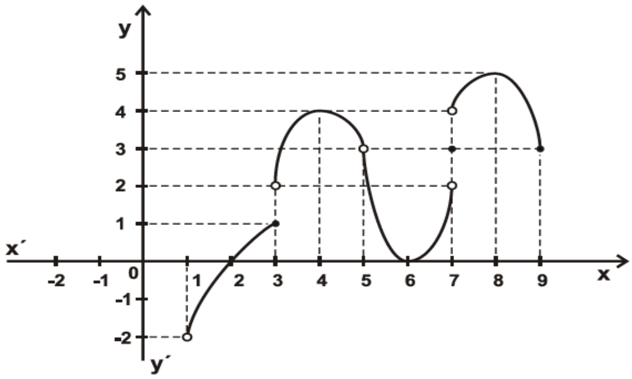
α)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

β)Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ)Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

δ)Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **(α), (β), (γ)** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

9. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

iv) $\lim\limits_{x\to 7} f(x)$ **v)** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{f(x)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{1}{f(x)}$ **iii)** $\lim\limits_{x\to 8} f\left(f(x)\right)$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=\dfrac{x}{1-x}$, $x\neq 1$.

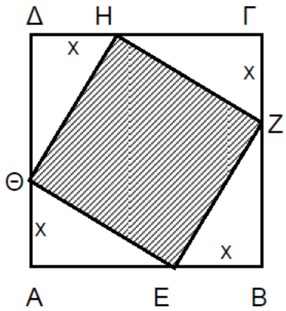
α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

β) Αν $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x\in(0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Αν $\varphi(x)=h^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

11. Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x)=2x^2-4x+4$,

$0 \le x \le 2$.

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0}+1$ cm².

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x \in R-\{0\}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

δ) Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \frac{x+1}{x}, & x>1 \\ x^2+\alpha, & x \le 1 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε το $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι α=1.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{1}{2},4\right]$.

γ) Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda \in R$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$ **.**

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της .

δ) Έστω $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$, $x>2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

15. Δίνονται οι συναρτήσεις

f: R→R με τύπο $f(x)=x^2+1$ και

g: $[2,+\infty)\to R$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση gof έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(gof)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

β) Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της gof στο $+\infty$.

γ) Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_0=2$ της συνάρτησης h:A-{2}→R με τύπο $h(x)=\dfrac{(gof)(x)}{x-2}$.

δ) Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}(gof)(x), & x\in A\\ 1-x^2, & x\in(-1,1)\end{cases}$. Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot ημ(\pi x)$ στο διάστημα [0,2].

16. Δίνονται οι συναρτήσεις:

f: $(1,+\infty)\to R$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

g: R→R, με τύπο $g(x)=e^x$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση fog.

β) Αν $(fog)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fog είναι '1 – 1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Αν $\varphi(x)=(fog)^{-1}(x)=\ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με x>1, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία.

δ) Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **(**γ**)**, να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to1^+}\varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$, $x\in R-\{3\}$.

α)Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο R - {3}.

β) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

γ) Να αποδείξετε ότι (fof)(x) = x για κάθε $x\in R-\{3\}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left(f(x)ημ\dfrac{1}{3x+1}\right)$.

18. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in R$, για τις οποίες ισχύει $(fog)(x)=x^2-2x$, για κάθε $x\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι α=β= - 1.

β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1}of$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση φ(x)= $\sqrt{(g^{-1}of)(x)}$.

δ)Έστω η συνάρτηση h:[0,1]→R, για την οποία ισχύει f(x)+2 ≤ h(x) ≤ g(x)+2, για κάθε x ∈ [0,1].

i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$

19. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x \in R$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

δ) Να βρείτε:

i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=λ , για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f: $(1,+\infty) \to R$ με τύπο f(x)= $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$ και η συνάρτηση g: $[0,+\infty) \to R$ με τύπο g(x)= $\sqrt{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2, x<0$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h=gof^{-1}$ είναι η h(x)= $\dfrac{x-1}{x}$, x<0.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος (β).

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(e^{-h(x)}\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$, όπου h είναι η συνάρτηση του ερωτήματος (β).

21. Δίνεται η συνάρτηση f : (-∞,1] → ℝ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση g : [0, +∞) → ℝ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h=fog.

β) Αν h(x)=(x-1)^2 , x∈[0,1] , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h.

γ) Έστω h^{-1} (x)= 1-$\sqrt{x}$, x∈[0,1]. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, x \in [0,1) \\ \dfrac{1}{2}, x=1 \end{cases}$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο [0,1].

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈(0,1) τέτοιο ώστε φ(x_0) = ημα, όπου $\frac{\pi}{6} < a < \frac{\pi}{2}$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $g:R \to R$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty) \to R$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}, x>0$.

β) **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}$.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις f : (1,+∞)→R με τύπο f(x)=$\frac{x}{x-1}$ και g: (0,+∞)→R με τύπο g(x) lnx.

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=g(x) έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e,e^2).

γ) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση φ=gof.

δ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο h(x)= ln$\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

Αν ϕ(x)= lnx-ln(x-1) , x∈(1,+∞), να εξετάσετε αν ϕ = h.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις g , h : (0,+∞) → R με τύπους g(x)=$\frac{e^x+1}{e^x-1}$ και h(x) lnx.

α)Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f=goh.

β) Αν $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$, $x>1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}=f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

δ) Να εξετάσετε α ν η εξίσωση $f(x)=\text{συν}\, x$ έχει λύση στο $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

1. Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , \quad 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2)\ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)\, e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν τα, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.

β) Να βρεθούν τα α, β∈R, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

γ) Για τις τιμές των α, β του ερωτήματος (**β**) να βρείτε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$, όπου α πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η συνάρτηση f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 4$.

β) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(1,0) να διέρχεται από το σημείο Α(-2,3).

γ) Αν $\alpha > 2$, να δείξετε ότι υπάρχει αριθμός $x_0 \in (1,2)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη x_0 να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα [0,1] και ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α) η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

β) υπάρχει $x_1\in(0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1)= \dfrac{f(1/5)+f(2/5)+f(3/5)+f(4/5)}{4}$.

γ) υπάρχει $x_2\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2,f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

4. Δίνεται η συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)- e^{2x}+1}{\text{ημ}2x} = 5$.

α) Να βρείτε το f(0).

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$.

γ) Αν $h(x) = e^{-x}f(x)$, να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και h στα σημεία A(0,f(0)) και B(0,h(0)) αντίστοιχα είναι παράλληλες.

5. Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι:
$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x\in R$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+\alpha, & x \le 1 \\ \left(1-e^{-x+1}\right)\ln(x-1), & x \in (1,2] \end{cases}$,όπου $\alpha\in R$.

α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-e^{-x+1}}{x-1}$

β) Να βρείτε το $\alpha\in IR$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

γ) Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο A(ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x.

7. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

α) Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση:$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

8. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5+x^3+x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x)\ge f(1+x)$ για κάθε $x\in IR$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της
f^{-1}.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x=3.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

β) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, όταν το x τείνει στο $-\infty$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1}+f(x)=0$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο R και $f(0)=f(\frac{3}{2})=0$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-f(\xi)$.

β) Εάν $f(x)=2x^2-3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(\alpha)=\int_\alpha^0 g(x)dx$, $\alpha\in R$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha)$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^{\lambda x}$, $\lambda>0$.

α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

β) Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y=\lambda e x$. Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Μ.

γ) Δείξτε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, της εφαπτομένης της στο σημείο Μ και του άξονα y'y, είναι $E(\lambda)=\frac{e-2}{2\lambda}$.

δ) Υπολογίστε το $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda^2\cdot E(\lambda)}{2+\eta\mu\lambda}$.

12. Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι “1-1”.

β) Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία Α(1,2005) και Β(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Μ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{668}x+2005$.

13. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2+x+\alpha$, $\alpha\in R$. Αν η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο τομής της με την ευθεία x=2 τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο $y_0=-3$, τότε

α) να βρείτε το α και την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

β) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης (ε) , του άξονα x'x και της ευθείας $x=\frac{3}{5}$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2ημ^2θ$ όπου $θ \in R$ μια σταθερά με $θ \neq κπ+\frac{π}{2}$,$κ \in Z$.

α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f, να αποδειχθεί ότι τα σημεία $Α(x_1, f(x_1))$, $Β(x_2, f(x_2))$ και $Γ(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία
$y = -2x - 2ημ^2θ$.

δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2ημ^2θ$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e\ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β) Να αποδειχθεί ότι ισχύει $f(x) \geq e$ για κάθε $x > 0$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{α}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$, για κάθε $x > 0$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 - 2\ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x>0$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$

i) Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

ii) Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,e)$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = α^x - \ln(x+1)$, $x>-1$. Όπου $α>0$ και $α \neq 1$.

α) Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x>-1$ να αποδείξετε ότι $α = e$.

β) Για $α = e$,

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$

iii) αν β, γ $\in\left(-1,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1, 2).

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln[(\lambda+1)x^2+x+1]-\ln(x+2)$, $x>-1$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda\geq -1$.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ, ώστε να υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

β) Έστω ότι $\lambda=-1$

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+\alpha^2=0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha\neq 0$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in R$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{\left(3x-2\right)^2+1}{x^4+1}\right]$

γ) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα y'y.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} xf(x)dx$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)\ln x+x-3$, $x>0$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [1, +∞).

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

δ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **(γ)** με $x_1<x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi\cdot f'(\xi)-f(\xi)=0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: R\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$ για κάθε $x\in R$.

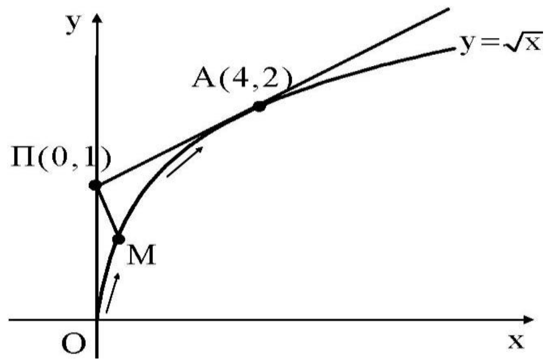
α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln\left(e^x-x\right)$ $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln\left(e^x-x\right)=\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

23. Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, x≥0. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0, 1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, t≥0 είναι x'(t)=16m/min.

α) Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, t≥0 δίνεται από τον τύπο: x(t)=16t

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4, 2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠΜ του παρατηρητή από το σημείο Ο μέχρι το σημείο Α.

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)\ \ell n x - 1,\ x>0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ) Αν x_1, x_2 με $x_1< x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος **(β)**, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε
$f'(x_0) + f(x_0) =2012$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$ με $x>0$, τον άξονα x'x και την ευθεία $x=e$.

25. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x)+1= e^x,\ \text{για κάθε } x\in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x)=x+2$, $x\in R$ έχει ακριβώς μία λύση.

δ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ell n x)\ell n\left(f(x)\right)\right]$

26. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g :R \to R$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in R$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in R$

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$

τέτοιο, ώστε: $\displaystyle\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\ \varepsilon\varphi x_0$

27. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \longrightarrow R$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x)+x^2\left(f'(x)-3\right)=-f'(x)$ για κάθε $x\in R$
- $f(1)=\dfrac{1}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$, $x\in R$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος (α).

γ) Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση: $f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\le f\left(8(x^2+1)^2\right)$

28. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in R$

α) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

β) Να λύσετε την ανίσωση $e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1}$, x∈R

γ) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο +∞ , καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο -∞.

δ) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2), x\in R$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), τον άξονα x'x και την ευθεία x = 1.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \quad x>0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) i) Να αποδείξετε ότι, για x > 0, ισχύει η ισοδυναμία

$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, x > 0,έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 =2$ και $x_2 = 4$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, x∈R.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (0, +∞).

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$ έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)dt<2xf(4x)$ για κάθε x>0.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ell nx, \quad x\in(0,+\infty)$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **(β)** ισχύει ότι $x_1 < x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

32. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$, x∈R.

β) Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f:R→R που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ για κάθε x∈R και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, x∈R να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

δ) Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος (γ), να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|) = f(x+3)-f(x) \text{ όταν } x\in [0, +\infty).$$

33. Δίνεται η συνάρτηση f:R→R με $f(x) = x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε x>0 ισχύει: $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$

γ) Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y= x^3$, $x\geq 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y(t) του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t>0$.

δ) Αν g: R→R είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= -\eta\mu x$, $x \in [0,\pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το Α, τις οποίες και να βρείτε.

β) Αν (ε_1): $y= -x$ και (ε_2): $y=x-\pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος (α), τότε να σχεδιάσετε τις (ε_1), (ε_2) και τη γραφική παράσταση της f, και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

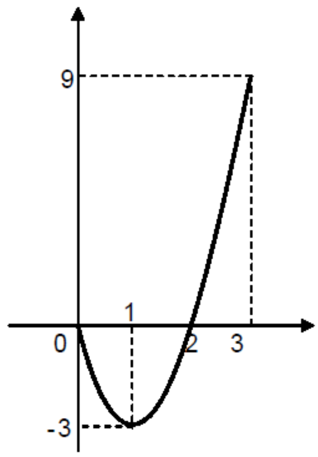
- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1), (ε_2), και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x'x.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e-1-\pi$.

35. Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,3], για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f ' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- f(0)=2, f(1)=0
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f ' και των ευθειών x=0 και x=3 ισούται με 8τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα [0,3].

α) Να αποδείξετε ότι f(3)=2, f(2)= - 2 και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{\ln x}$, $\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}$.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

36. Έχουμε ένα σύρμα μήκος 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x, είναι:

E(x)= $\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}$, $x\in(0,8)$.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

37. Δίνεται η συνάρτηση f :[0,π]→R, με τύπο: f(x)=2ημx-x.

α) Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x)\cdot \text{συν}x\, dx$.

δ) i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}[(f(x)-f(2x))\cdot \ln x]$

38. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\ge 1 \\ e^{x-1}+\beta x & ,x<1 \end{cases}$

α)Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία είναι αρνητική.

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)-x_o\cdot f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_o,+\infty)$.

δ) Ένα σημείο M(x,y) κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\ge 1$. Τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3,10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου MOK τη χρονική στιγμή t_o, όπου $K(x,0)$ και $O(0,0)$.

39. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $[0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε x>0 και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο M(1,1). Έστω το σημείο $A(\frac{3}{2},0)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα x'x.

δ) Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to R$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\ge 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=g(x) έχει μοναδική ρίζα x_0, η οποία ανήκει στο (0,1).

40. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0\\ \etaμx+\lambda συνx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$ με λ>0

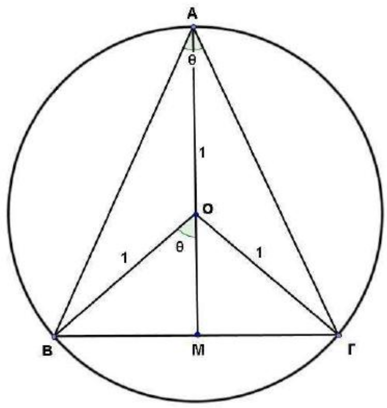
α) Να αποδείξετε ότι λ=1.

β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(0,1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$.

γ) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

δ) Ένα σημείο M(α, f(α)) με α≤0 κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$.Η εφαπτομένητης γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

41. Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1 , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $B\hat{O}M=\theta$, τότε:



α)Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι : Ε(θ) = (1+συνθ)ημθ. $\theta\in(0,\pi)$.

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ∈(0,π), για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται .

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δυο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1<\theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\dfrac{3}{4}$.

δ) Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος (γ), να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(0,\pi)$ τέτοια, ώστε: $(\dfrac{\pi}{3}-\theta_1)E'(\xi_1)=\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)E'(\xi_2)$.

42. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R→R με τύπο $f(x)=x^3$.

α) Να αποδείξετε ότι από το σημείο N(-2,f(-2)) διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

β) Έστω (ε): y=3x-2 η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος (α). Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Μ(0,α) με -2<α<2. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες x= -1 και x= +1 υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.

γ) Ένα υλικό σημείο $M(x,x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)>0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Ν(-2, -8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , 0<x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$,με α<-3.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

β) i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,\frac{3\pi}{2}]$.

ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$.

γ) Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

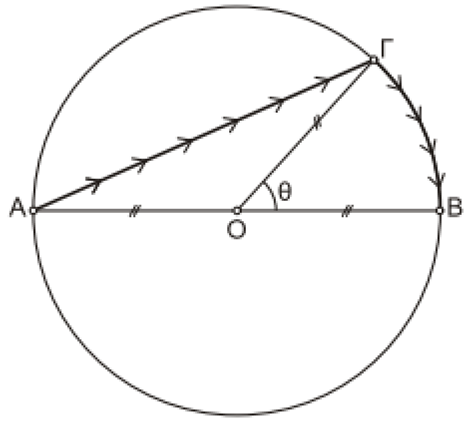
δ) Να δείξετε ότι $f(x)\ge -1$, για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right]$.

44. Κυκλική λίμνη έχει κέντρο Ο και ακτίνα R=1km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα v_1 = 2km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα v_2 = 4km/h. Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο Α του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο Β. Ο μαθητής μπορεί:

I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο Α σε σημείο Γ της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία $B\hat{O}\Gamma=\theta,\ \theta\in(0,\pi)$ και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου ΓΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο Α στο σημείο Β (θ=0)

III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το Α στο Β (θ=π) .



α) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας θ (σε ακτίνια) είναι $t(\theta)=\frac{1}{4}\theta+\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}$, $\theta\in[0,\pi]$.

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας R το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία θ(σε ακτίνια) είναι S=R.θ.

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.

γ) Σε ποια από τις επιλογές (Ι), (ΙΙ) ή (ΙΙΙ) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

45. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f′ της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & x<-1\\ 3x^2-1 & x>-1\end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & x\le-1\\ x^3-x & x>-1\end{cases}$$

β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο -2.

γ) Έστω y = 2x- 2 η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο Μ(x,y) με x > 2 κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα x′x και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0 .

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

46. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3, x<1 \\ \frac{1}{x}+\alpha, x\geq 1 \end{cases}$.

όπου α ∈ R , για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι $\int_2^3 xf(x)dx=1$.

α) Να αποδείξετε ότι α =0.

β) i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x' x

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της

δ) Έστω $(\varepsilon): y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με x ≥ 1, την ευθεία (ε), τον άξονα x ' x και την ευθεία x=e.

47. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.
- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu x}{x}=0$
- $f'(x)f''(x)=x$, για κάθε x∈R.

α) i. Να αποδείξετε ότι f(0)=0 = και f'(0)=1.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$, x∈R .

γ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

48. Δίνεται η συνάρτηση f : [1,2]→R , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- f(1)= 0
- f(2)=2

- $f'(2)=1$
- $f''(x)<0$ για κάθε $x \in [1,2]$

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία (ε_1): $y=-x+2$ και

ii. εφάπτεται στην ευθεία (ε_2): $y=x$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x \in (1,2)$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \geq 2x-2$, για κάθε $x \in [1.2]$

ii. $1 < \int_1^2 f(x)dx < \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

1. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω f(t) η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f(t) είναι $\frac{8}{t+1} - 2$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f(t).

β) Σε ποια χρονική στιγμή t, μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t = 8 υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή t = 10 η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2{,}4$).

2. Σε ένα διαγωνισμό ενός Οργανισμού για την πρόσληψη προσωπικού, συγκεντρώθηκαν 1.000 γραπτά υποψηφίων. Κάθε γραπτό διορθώνεται από δύο διαφορετικούς βαθμολογητές. Κάθε βαθμολογητής διορθώνει 4 φακέλους των 25 γραπτών την ημέρα. Για τη διόρθωση κάθε γραπτού ο βαθμολογητής αμείβεται με 200 δραχμές. Τη διόρθωση συντονίζουν δύο επόπτες που αμείβονται με 4.000 δραχμές την ημέρα. Στο τέλος της διόρθωσης όλων των γραπτών, κάθε βαθμολογητής παίρνει επί πλέον ως επίδομα 10.000 δραχμές ανεξάρτητα από τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκε.

α) Να αποδείξετε ότι το κόστος K(x) σε χιλιάδες δραχμές για τη διόρθωση όλων των γραπτών, δίνεται από τη συνάρτηση:

$K(x) = 10\left(x + \frac{16}{x} + 40\right)$ όπου x ο αριθμός των βαθμολογητών που απασχολούνται.

β) Πόσοι πρέπει να είναι οι βαθμολογητές, ώστε το κόστος της διόρθωσης να είναι ελάχιστο;

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος του (**β)** ερωτήματος και τον αριθμό των ημερών που απασχολήθηκαν οι βαθμολογητές για τη διόρθωση των γραπτών.

3. Τη χρονική στιγμή t=0 χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$,$t\geq 0$ όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

4. Η τιμή P (σε χιλιάδες δραχμές) ενός προϊόντος, t μήνες μετά την εισαγωγή του στην αγορά, δίνεται από τον τύπο $P(t) = 4 + \dfrac{t-6}{t^2 + \dfrac{25}{4}}$.

α) Να βρείτε την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

β) Να βρείτε το χρονικό διάστημα, στο οποίο η τιμή του προϊόντος συνεχώς αυξάνεται.

γ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τιμή του προϊόντος γίνεται μέγιστη.

δ)Να δείξετε ότι η τιμή του προϊόντος μετά από κάποια χρονική στιγμή συνεχώς μειώνεται, χωρίς όμως να μπορεί να γίνει μικρότερη από την τιμή του προϊόντος τη στιγμή της εισαγωγής του στην αγορά.

5. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x\in R$,

ii) $f'(x) = -2xf^2(x)$, για κάθε $x\in R$,

iii) $f(0)=1$

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2 \text{ , για κάθε } x\in R.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι: $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty}$ (x f(x) ημ2x).

6. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο (0,+∞) για την οποία ισχύει: $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x},\ x>0$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες x=1, x=e.

7. **α)** Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο [α, β]. Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε και $\int_\alpha^\beta h(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο IR συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1,\ x \in IR$ και $f(0) = 0$.

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f.

ii) Να δείξετε ότι $\dfrac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

iii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες x = 0, x = 1 και τον άξονα x'x, να δείξετε ότι $\dfrac{1}{4} < E < \dfrac{1}{2} f(1)$.

8. Έστω η συνάρτηση f, ορισμένη στο R με δεύτερη συνεχή παράγωγο, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$, x∈R. και $f(0) = 2f'(0) = 1$.

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f.

β) Αν g είναι συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το διάστημα [0,1], να δείξετε ότι η εξίσωση $2x - \int_0^x \dfrac{g(t)}{1+f^2(t)}dt = 1$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα [0,1].

9. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α, β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β). Αν ισχύει f(α) = f(β) = 0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α, β), δ∈(α, β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) =0 στο διάστημα (α, β).

β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

10. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο R με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις: $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

γ) Έστω η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x'x, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45^o .

11. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, +\infty) \to R$ τέτοια, ώστε $f(x) = e^x - (x + 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει μοναδική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

12. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in IR$ και $f(0) = 0$.

α) Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση : $g(x) = \dfrac{x^{2007}}{2007}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $g(x) = \dfrac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο (0 , 1).

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$,για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2} = 2005$.

α) Να δείξετε ότι: **i)** $f(0)=0$ **ii)** $f'(0)=1$.

β) Να βρείτε το $\lambda \in R$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2} = 3$.

γ) Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο R και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x \in R$, να δείξετε ότι:

i) $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq0$ **ii)** $\int_0^1 f(x)dx < f(1)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^{\beta})$ με $\beta \in R$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ) Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ με $x>0$.

α) i) Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\alpha\in(0,+\infty)$ τέτοιος ώστε $(\alpha+1)^{\alpha}=\alpha^{\alpha+1}$.

16. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο για την οποία ισχύει

$f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=20x^3+6x-45$.

β) Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R .

Να αποδείξετε ότι $g''(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$.

γ) Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος **(α)** και τη συνάρτηση g του ερωτήματος **(β)** ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$ και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

i) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1−1 .

17. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\geq0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση F που είναι μια αρχική της f με $F(0)=0$, $x\in[0, +\infty)$ και τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{F(x)}{\int_0^x tf(t)dt}$, $x\in(0,+\infty)$, που είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t)+F(t)]dt=F(1)$

β) Αν $h(1)=2$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt<2\int_0^2 t\,f(t)dt$

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t)dt=\dfrac{1}{2}F(1)$

18. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει $\int_0^2(t-2)f(t)dt=0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x)=\int_0^x tf(t)dt,\quad x\in[0,2]$$

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3, & x\in(0,2]\\ 6\lim\limits_{t\to o}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x=0\end{cases}$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα [0, 2] , παραγωγίσιμη στο διάστημα (0, 2) και ισχύει $G'(x)=-\dfrac{H(x)}{x^2},\quad 0<x<2$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\alpha\in(0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi\in(0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$.

19. Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to R$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x},\quad 0\le x\le 2$,

$f'(0)=2f(0)$, $f'(2)=2f(2)+12e^4$, $f(1)=e^2$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}},\quad 0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [0,2].

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$

γ) Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x^2}dx$

20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$ η οποία για κάθε $x\in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x)\ne x$ $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in R$ και $f(0)=3$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$, $x\in R$, είναι σταθερή.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in R$

21. Έστω συνάρτηση $f: R\to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο R με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)\ge 1$ για κάθε $x\in R$

β) Αν $f'(x) + 2x = 2x\cdot(f(x)+x^2)$, $x\in R$, τότε να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2$, $x\in R$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία για κάθε $x \in R$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ **ii)** $f(x)f'(x)=e^{2x}$ iii) $f(0)=1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, $x \in R$

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

23. Δίνονται η συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$
- $f'(0) < f(1) - f(0)$ και
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο R.

Αν επιπλέον $g(x)=f(x) - x$, $x \in R$ τότε:

γ) Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x g(x)}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx > 2$

ε) Αν το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα x'x και τις ευθείες με εξισώσεις x=0 και x=1 είναι $E(\Omega)=e-\dfrac{5}{2}$ τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)dx$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi} f(t)dt = 2$.

24. Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = e^{-x}(\ell nx - x)$ και η αρχική F της f.

α) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+} \left[(f(x))^2 \eta\mu \dfrac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

β) Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x \leq x-1$, που ισχύει για κάθε x>0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x) + F(3x) > 2F(2x), \text{ για κάθε } x>0 .$$

γ) Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\beta, 2\beta)$ τέτοιο ώστε: $F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi)$

25. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\ell n\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$ και F η αρχική της με F(1)=0.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0,F(x_0))$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_0,\beta)$ με $\beta>x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M(\xi,F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: F(\beta)x-(\beta-1)y+2012(\beta-1)=0$$

β) Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα (1,3)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x tf(t)dt$, για κάθε x>0

26. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1)=1$
- $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

Θεωρούμε επίσης την παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(1)=0$ καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$

β) η g είναι γνησίως αύξουσα.

γ) η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση $(\alpha-1)g(x)=(f(\alpha)-1)(x-\alpha)$, $x>1$, $\alpha>1$ έχει ακριβώς μια λύση, αν $g(\alpha)=0$.

27. Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)f''(x)+1=(f'(x))^2$ για κάθε $x>0$
- $f(x)f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=0$
- $f(1)=f'(1)=1$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ με x>0 και $h(x)=(f'(x))^3$ με $x\geq 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

β) $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

γ) $\int_0^1 (2-x)f(x)dx < 1$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq 0 \\ 1 \;, & \text{αν } x=0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0$ έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x=0$.

ii) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή t=0 από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2$, $x\in(0,+\infty)$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

29. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \longrightarrow R$, $A=(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A)=R$, τέτοια, ώστε $e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$

α)Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f .

Για τα ερωτήματα **(β)** και **(γ)** δίνεται ότι $f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right)$, $x\in R$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y′y , και την ευθεία $x=1$

γ) Για κάθε $x\in R$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x\in R$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, είναι ίσο με 1

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x\in R$ η απόσταση των σημείων Α, Β γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

30. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε και x∈R
- f(0)=0.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, x∈R.

β) i) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία y=x και τις ευθείες x=0 και x=1.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \dfrac{8-3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x-2} = 0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

31. Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει: $(x^2-x)\cdot f'(x) + x\cdot f(x) = 1$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

α)Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ell nx}{x-1}, & 0<x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

β) Να αποδείξετε ότι $\int_1^x f(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^{1} \dfrac{f(t)}{t}dt$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt \geq \dfrac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{x} tf(t)dt$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

32. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R , με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi} \left(f(x) + f''(x)\right) \eta\mu x dx = \pi$
- f(R)=R και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} = 1$
- $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ για κάθε x∈R.

α) Να δείξετε ότι f(π) = π και f′(0)=1

β) i) Να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο R.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$.

δ)Να δείξετε ότι $0<\int_1^{e^{\pi}} \dfrac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$.

33. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}+1 & ,0<x<1\\ 1 & ,x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1} & ,x>1\end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο (0,+∞) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι το $x_0=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

γ) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο (0,+∞).

ii) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα των x και τις ευθείες x=1 και x= x_0, όπου x_0 η μοναδική ρίζα της εξίσωσης f f(x)=0 στο (0,+∞), να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{-x_0^2-2x_0+2}{2}$$

δ) Αν F είναι μια παράγουσα της f στο [1, +∞) να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x) > xF(1)+F(x^2),\ \text{για κάθε } x>1.$$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^4}, & x\in[-1,0)\\ e^x ημx, & x\in[0,\pi]\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [-1,π] και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τη γραφική παράσταση της g, με $g(x)=e^{5x}$, $x\in R$, τον άξονα y'y και την ευθεία x=π.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{ημx}{x}+α, & -\dfrac{\pi}{2}\le x<0\\ 2, & x=0\\ x^3-3x^2+2, & x>0\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα [0, 2] ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in R$.

γ) Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι: $\pi < \int_{\frac{-\pi}{2}}^{2} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$.

ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(\frac{-\pi}{2}\cdot x\right) = f\left(\frac{-\pi}{2}\cdot e^{-x}\right)$ έχει μοναδική λύση στο (0,1).

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in R$ με $\alpha > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$, τέτοια ώστε η συνάρτηση f να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=f(1) είναι αδύνατη στο (α, x_2).

δ) Αν $\alpha=2$ να αποδείξετε ότι: $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}$.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$, με τύπο: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα (0,1).

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 2^{f(x)} - 1$ για κάθε $x>0$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x} = 0$, όπου $0<\alpha<1$, έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μία στο διάστημα (0,1) και μία στο διάστημα (1,2).

ε) Αν F είναι μία αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e) = e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\ln 2 < F(1) < \ln\left(\frac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.

38. Δίνονται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = (x-1)\cdot\ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in R$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία (ε) και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$, για κάθε $x \in R$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\cdot\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$, για κάθε

$\lambda \in R$.

δ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in R$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

39. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R, με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Να αποδείξετε ότι f(x)+f(1-x)=1 για κάθε $x \in R$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x'x και την ευθεία x=1 ισούται με $\frac{1}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)dx < 1$.

δ) Να λύσετε στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$ την εξίσωση $f(\eta\mu^2 x)+f(\sigma\upsilon\nu^2 x)=f(\varepsilon\varphi x \cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x})$.

40. Δίνεται η συνάρτηση f: R→R με τύπο $f(x)= e^x+x^2-ex-1$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x_o) = x_o^2 - (e+2)\, x_o + e - 1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to x_0}\left[\frac{1}{f(x) - f(x_o)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_o}\right)\right]$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος **(α)** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

γ) Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **(α)** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ για $x \in (x_o,1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

δ) Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **(α)** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **(γ)**, να αποδείξετε ότι $f(x_o) > f(\rho)(f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

41. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = x\ell nx - \ell n(\lambda x)$ $x \in (0, +\infty)$ $\lambda \in (0, +\infty)$ και

$g(x) = x^x$, $x \in (0, +\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x =1, το οποίο και να βρείτε. Στην συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο (0, +∞).

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του λ>0 για την οποία ισχύει $x^x \geq \lambda x$, για κάθε x> 0.

Για τα ερωτήματα γ και δ θεωρήστε ότι λ=1.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=λx είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ) Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} x^x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ Να αποδείξετε ότι :

i) η h είναι συνεχής

ii) Η εξίσωση $x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)dt=0$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάσημα (0,1)

42. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $(0,\frac{\pi}{2})\rightarrow R$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\cdot συν^3x+f'(x)\cdot συν^2x\cdot ημx-1=0$, για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x)=f(x)·ημx-εφx, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{ημx}+\frac{1}{συνx}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$,το οποίο και να βρείτε.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$ έχει ακριβώς δύο ρίζες $ρ_1$, $ρ_2$, με $ρ_1<ρ_2$.

δ) Να αποδείξετε ότι $f'(ρ_2)(4ρ_2-π)>4\sqrt{2}$, όπου $ρ_2$ η ρίζα του ερωτήματος (γ).

43. α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x=\frac{1}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο (1, e). Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση f: $(0,+\infty)\rightarrow R$ έχει τύπο $f(x)=(\ln x_0).(x+1)-\ln x-1$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο x_0 το $f(x_0)=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=x \cdot e^{-x}$, $x \in R$ και $h(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in R$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

δ) Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to R$, συνεχής, με $f(x)>\varphi(x)$, για κάθε $x>0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$ και $B(x,\varphi(x))$, με $x>0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x=x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x)=e^x$ και συνάρτηση $g: R \to R$ με τύπο $g(x)=-x^2+\alpha x$, $\alpha \in R$ για την οποία το όριο $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{-g(x)}+\alpha x)$ υπάρχει στο R.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο Μ(-1,0) είναι η ευθεία ε : y = x + 1. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)>g(x)$, για κάθε $x \in R$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x-1)-x}{x-k}+\frac{f(x)-g(x)}{x-k-1}=0$, $k \in R-\{1\}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (k, k+1)

45. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to R$ με τύπο: $f(x)=x-\ln(3x)$

α) i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1<1<x_2$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

β) Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα x′x, να αποδείξετε ότι: $E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$

γ) Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1)<0$

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ έχει λύση.

46. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} -x^3+3x+1, & -1 \le x \le 0 \\ x^x, & 0 \le x \le \frac{2}{e} \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο x_0.

β) i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ)Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in[-1,\frac{2}{e}]$ υπάρχει $\xi\in[-1,\frac{2}{e}]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

47. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to R$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\ \text{όπου}\ \kappa\in R$$

για την οποία ισχύει: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=l\in R$.

α) Να αποδείξετε ότι κ=3.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) 0 = έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

γ)Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi,f(\xi))$, με $\xi\in(0,1)$ στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

δ) Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα (0,2)με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$

ii) η εξίσωση $x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1,x_2).

48. Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=\begin{cases} e^x\ ,\ x\geq 0 \\ -e^{-x}+2\ ,\ x<0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1>0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0), έχει εξίσωση y=ex.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής A, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0, f(x_0))$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x=x_0$ και $x=1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

δ) Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f , έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;